

## 4 L'EQUIVALENZA TRA MASSA ED ENERGIA

La *conservazione dell'energia* è una legge fondamentale della fisica classica. Inoltre, indipendentemente dall'energia, in tutti i fenomeni studiati dalla fisica classica si conserva la massa.

La *conservazione della massa* è anche un principio della chimica: secondo l'enunciato del francese Antoine Lavoisier (1743-1794), in ogni reazione chimica la somma delle masse dei reagenti è uguale alla somma delle masse dei prodotti.

La teoria della relatività prevede, invece, che l'energia e la massa, prese singolarmente, non si conservino. La massa è una forma di energia, che va aggiunta all'energia cinetica e all'energia potenziale nell'enunciato di una più generale legge di *conservazione della massa-energia*.

In particolare, come dimostreremo nel seguito, la teoria della relatività afferma che:

se un corpo assorbe una quantità di energia  $E$ , la sua massa non si conserva, ma aumenta della quantità

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} \quad [11]$$

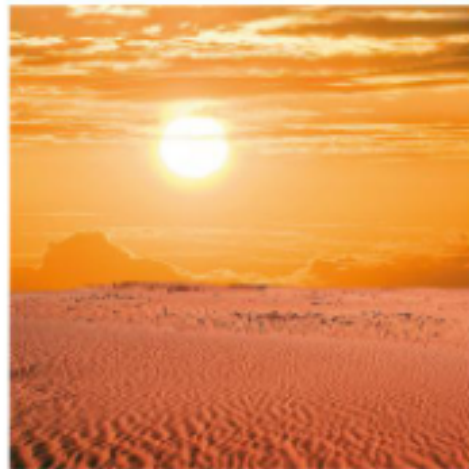
variazione di massa [kg] ————— energia assorbita [J]  
 —————  
 velocità della luce nel vuoto [m/s]

Viceversa, la massa del corpo diminuisce se esso perde energia. Il Sole, per esempio, irradia ogni secondo  $3,85 \times 10^{26}$  J di energia sotto forma di onde elettromagnetiche. In base alla [11], la sua massa si riduce al ritmo di

$$\frac{3,87 \times 10^{26} \text{ J}}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}^2} = 4,30 \times 10^9 \text{ kg}$$

al secondo.

Ciò nonostante, la massa del Sole è così grande che nel prossimo milione di anni ne verrà consumata solo una parte su dieci milioni.



### La quantità di moto della luce

Per dimostrare la formula [11] dobbiamo ricordare una proprietà delle onde elettromagnetiche che abbiamo incontrato nel capitolo «Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche»: se un corpo assorbe dall'onda un'energia  $E$ , esso riceve, *nella direzione di propagazione dell'onda*, una quantità di moto che ha modulo

$$p = \frac{E}{c} \quad [12]$$

Inoltre ricordiamo che la pressione di radiazione  $p_R$ , dovuta all'effetto dell'onda elettromagnetica, è descritta dall'equazione

$$p_R = \frac{E_R}{c}, \quad [13]$$

### AL VOLO

#### UN AUMENTO DI MASSA IMPERCETTIBILE E DUE MODI PER OTTENERLO

Un blocco di ferro [il cui calore specifico vale  $c_{Fe} = 449 \text{ J}/[\text{kg} \cdot \text{K}]$ ] è riscaldato di 100 K sul fuoco.

- Calcola l'aumento di massa relativo  $\frac{\Delta m}{m}$  causato dal riscaldamento del blocco.

[ $4,99 \times 10^{-13}$ ]

- Quanti atomi per mole dovresti aggiungere al blocco per aumentare la sua massa della stessa quantità, senza riscaldarlo?

[ $3,00 \times 10^{11} \text{ mol}^{-1}$ ]

## AL VOLO

## LA VELA SOLARE DI IKAROS

La superficie della vela solare di IKAROS misura  $200 \text{ m}^2$ .

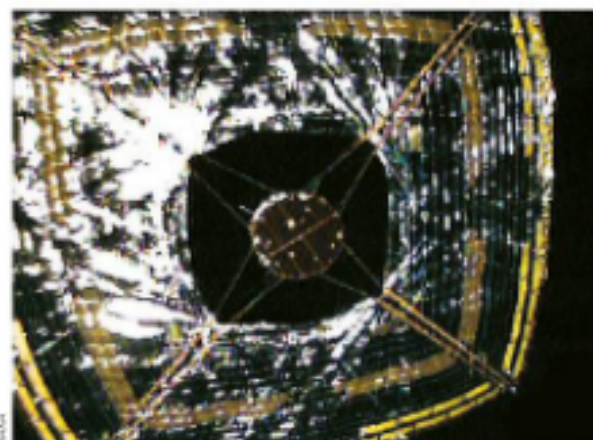
- Vicino a Venere, dove l'irradiamento solare è di  $2,63 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ , quanto vale la forza sulla vela, disposta perpendicolarmente ai raggi del Sole?

$[1,75 \times 10^3 \text{ N}]$

dove  $E_R$  è l'irradiamento dell'onda elettromagnetica sulla superficie che assorbe energia. L'irradiamento del Sole sulla superficie terrestre è  $E_R = 1,37 \times 10^3 \text{ W/m}^2$  e la corrispondente pressione di radiazione è estremamente piccola, inferiore alla pressione atmosferica di undici ordini di grandezza:

$$p_R = \frac{1,37 \times 10^3 \text{ W/m}^2}{3,00 \times 10^8 \text{ m/s}^2} = 4,57 \times 10^{-6} \text{ Pa.}$$

Da noi, sulla Terra, la pressione di radiazione del Sole non produce quindi alcun effetto.

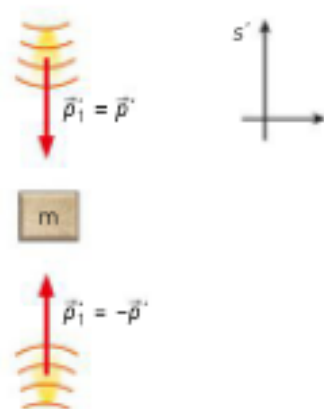


Non è così nello spazio interplanetario. Nel 2010 è stata lanciata la **sonda IKAROS**, dell'Agenzia spaziale giapponese JAXA, che ha raggiunto Venere sfruttando per la prima volta, come forma principale di propulsione, la pressione di radiazione del Sole su una vela. La vela solare di IKAROS è un foglio quadrato di poliimmide, una plastica molto resistente, con una diagonale di 20 metri e uno spessore di pochi micrometri.

## Un esperimento ideale per dimostrare l'equivalenza massa-energia

Abbiamo visto che un lampo di luce, assieme alla sua energia  $E$ , trasporta una quantità di moto  $\vec{p}$ , che è orientata nella direzione e nel verso di propagazione e ha modulo  $p = \frac{E}{c}$ . Se un corpo assorbe il lampo di luce, questa energia e questa quantità di moto vengono cedute al corpo.

### Un corpo assorbe due lampi di luce: la descrizione del fenomeno nel sistema di riferimento del corpo



- Immagina che un corpo di massa  $m$ , in quiete in un sistema di riferimento inerziale  $S'$ , assorba nello stesso istante due lampi di luce, che giungono da parti opposte lungo la stessa direzione e che trasportano, ciascuno, un'energia  $\frac{E'}{2}$  e una quantità di moto di modulo  $p' = \frac{E'}{2c}$  (FIGURA 7).
- Dal momento che le due quantità di moto  $\vec{p}'_1 = \vec{p}'$  e  $\vec{p}'_2 = -\vec{p}'$  cedute al corpo dai lampi di luce hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, ma versi opposti, la somma vettoriale delle due è uguale al vettore nullo. Perciò, assorbendo l'energia  $\frac{E'}{2} + \frac{E'}{2} = E'$ , il corpo non subisce alcuna variazione di velocità e rimane fermo nel sistema  $S'$ .

### La descrizione dello stesso fenomeno in un altro sistema di riferimento

- Considera, ora, il sistema di riferimento inerziale  $S$  rappresentato nella FIGURA 8: rispetto a  $S'$ , il sistema  $S$  si muove con una velocità  $\vec{v}$  perpendicolare alla direzione lungo cui, in  $S'$ , si propagano i due lampi di luce.
- In  $S$  la somma vettoriale delle quantità di moto  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$  cedute dalla luce al corpo non è nulla, ma è uguale al doppio del vettore componente orizzontale  $\vec{p}_x$  di ciascuno dei due vettori. Osserva che i vettori componenti verticali,  $\vec{p}_y$  e  $-\vec{p}_y$ , si elidono.

FIGURA 7 ►

Nel sistema  $S'$ , il blocco di massa  $m$  assorbe due lampi di luce di uguale energia, che si propagano lungo la stessa direzione in versi opposti, e rimane fermo.

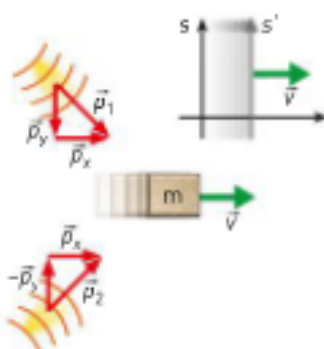


FIGURA 8

Nel sistema  $S$  i due lampi di luce hanno direzioni oblique e la somma vettoriale delle loro quantità di moto è parallela alla velocità  $\vec{v}$  del blocco.



- La FIGURA 9 mostra la velocità  $\vec{c}$  di uno dei lampi di luce e la velocità  $\vec{v}$  con cui si muove il corpo in  $S$ ; mostra, inoltre, la quantità di moto  $\vec{p}_1$  trasportata dalla luce, e il suo vettore componente  $\vec{p}_x$  parallelo a  $\vec{v}$ . Se indichi con  $\frac{E}{2}$  l'energia del lampo di luce in  $S$ , sai che il modulo di  $\vec{p}_1$  è  $p = \frac{E}{2c}$ .
- I due triangoli  $ABC$  e  $ADE$  indicati nella figura sono simili, essendo rettangoli con un angolo acuto in comune. Dalla proporzionalità dei due cateti  $BC$  e  $DE$  con le corrispondenti ipotenuse  $AC$  e  $AE$  ottieni

$$p_x = \frac{v}{c} p = \frac{v}{c} \frac{E}{2c} = \frac{vE}{2c^2}.$$

Di conseguenza, la quantità di moto del corpo aumenta, lungo la direzione di  $\vec{v}$ , della quantità

$$\Delta p = 2p_x = \frac{vE}{c^2}.$$

### Il confronto tra le due descrizioni

- Nel sistema di riferimento  $S$ , prima dell'assorbimento dei due lampi di luce il corpo di massa  $m$  era in movimento con velocità  $\vec{v}$ ; quindi aveva una quantità di moto di modulo

$$p_i = m v.$$

Dopo l'assorbimento, il modulo della sua quantità di moto è divenuto

$$p_f = mv + \Delta p = mv + \frac{vE}{c^2}. \quad [14]$$

- Nonostante questo aumento della quantità di moto, in  $S$  la velocità del corpo non può essere cambiata, visto che in  $S'$  essa è rimasta nulla come era all'inizio. Poiché dunque, con l'assorbimento dei due fotoni, cambia la quantità di moto, ma non la velocità del corpo, deve cambiare l'unica altra grandezza che entra nella definizione della quantità di moto, cioè la massa.
- Così, dopo che il corpo ha assorbito l'energia complessiva  $E$ , esso deve avere una nuova massa  $m + \Delta m$ , tale che

$$p_f = (m + \Delta m) v.$$

Confrontando questa equazione con la [14], ottieni

$$mv + \frac{vE}{c^2} = (m + \Delta m)v,$$

da cui segue  $\Delta m = \frac{E}{c^2}$ , cioè la formula [11].

## La massa è energia

L'equazione [11], che abbiamo appena dimostrato, indica che la massa è una forma di energia, in quanto essa scompare (secondo una relazione di proporzionalità) quando compare energia e viceversa.

Tutte le trasformazioni di massa in energia e di energia in massa sono regolate dalla **relazione di Einstein**, che di solito è scritta nella forma

$$\begin{array}{ccc}
 \text{energia totale (J)} & \text{---} & \text{massa (kg)} \\
 & \text{---} & \\
 & E = m c^2 & \\
 & \text{---} & \\
 & & \text{velocità della luce nel vuoto (m/s)}
 \end{array} \quad [15]$$

Dalla [15] si deduce che un corpo fermo e non soggetto a forze possiede un'energia per il solo fatto di avere una massa  $m_0$ . Tale energia si chiama **energia a riposo** o **energia di**

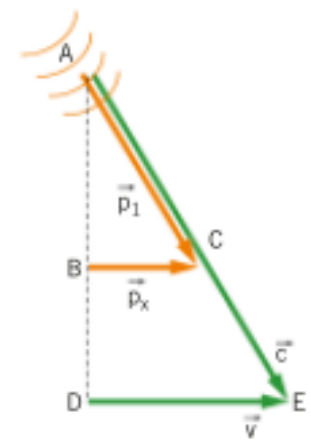


FIGURA 9 I triangoli rettangoli  $ABC$  e  $ADE$  sono simili.

quiete del corpo ed è data da

$$E_0 = m_0 c^2 \quad [16]$$

energia a riposo (J)
massa a riposo (kg)
velocità della luce nel vuoto (m/s)

L'energia  $E$  espressa dalla [15] comprende l'energia a riposo  $E_0$  e tutte le altre forme di energia (cinetica e potenziale). Poiché la massa è direttamente proporzionale all'energia, la massa  $m$  che compare nella [15] è necessariamente diversa dalla massa  $m_0$  della [16]. La massa  $m_0$  è una costante caratteristica del corpo, chiamata massa a riposo.

La relazione [16] è confermata dagli esperimenti sulle particelle elementari, nei quali è possibile osservare particelle che si materializzano quando scompare energia e, viceversa, particelle che si annichilano, emettendo contemporaneamente la quantità di energia prevista dalla relazione di Einstein.

### PROBLEMA MODELLO 6 UNA SCISSIONE NUCLEARE SPONTANEA

Un nucleo di uranio  $-238$  (massa  $m_U = 238,0508u$ ) può "decadere" in modo spontaneo, dividendosi in un nucleo di torio  $-234$  (massa  $m_{Th} = 234,0436u$ ) e un nucleo di elio  $-4$  (massa  $m_{He} = 4,0026u$ ). La quantità  $u = 1,6605 \times 10^{-27}$  kg è detta *unità di massa atomica*.

► Calcola l'energia emessa a seguito del decadimento.

#### ■ DATI

Massa uranio-238:  $m_U = 238,0508u$   
 Massa torio-234:  $m_{Th} = 234,0436u$   
 Massa elio-4:  $m_{He} = 4,0026u$   
 Unità di massa atomica:  $u = 1,6605 \times 10^{-27}$  kg

#### ■ INCOGNITE

Energia emessa:  $E = ?$

### L'IDEA

- Calcolo la massa presente inizialmente e la massa totale finale.
- Se le due quantità sono diverse, vuol dire che il processo è accompagnato da una conversione di massa in energia (o viceversa, se la massa finale è maggiore).

### LA SOLUZIONE

#### Calcolo la massa totale finale.

La massa totale dei due nuclei di torio e di elio è:  $m_f = m_{Th} + m_{He} = (234,0436 + 4,0026)u = 238,0462u$

#### Calcolo la variazione di massa.

$\Delta m = m_f - m_i = m_f - m_U = 238,0462u - 238,0508u = -0,0046u = -0,0046 \times (1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}) = -7,6 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Poiché la massa diminuisce, nel processo si libera dell'energia.

#### Calcolo l'energia emessa.

Per la relazione di Einstein, alla scomparsa di questa massa deve corrispondere l'emissione nel processo di decadimento di una quantità di energia pari a:  $E = |\Delta m|c^2 = |7,6 \times 10^{-30} \text{ kg}| \times (3,0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 6,8 \times 10^{-13} \text{ J}$

La conversione di massa in energia è alla base dei processi di fissione nucleare, impiegati nelle centrali nucleari per la produzione di energia elettrica. L'energia liberata dalla scissione può assumere diverse forme: energia cinetica dei due nuclei oppure radiazione elettromagnetica (o entrambe).





## La PET: fisica relativistica per guardare dentro al corpo

Se la realtà fisica fosse completamente descritta dalle leggi classiche di Newton e di Maxwell, non avremmo la **tomografia a emissione di positroni** o PET (acronimo di «Positron Emission Tomography»).

Per sapere come funziona questa tecnica di diagnostica per immagini, il primo passo è capirne il nome. Analizziamolo parola per parola.

- ▶ In greco «tómos» vuol dire «sezione»; quindi, per «tomografia» si intende un procedimento che rende visibile una sezione del corpo umano, o che fornisce un'immagine tridimensionale dell'interno del corpo ricostruita strato per strato.
- ▶ Per generare dentro al corpo i segnali utili a produrre immagini, rilevabili da fuori, la PET usa i **positroni**. L'esistenza di queste particelle, che hanno la stessa massa degli elettroni, ma carica opposta, fu prevista per via teorica da Paul Dirac nel 1930, in base ai principi della relatività e della fisica quantistica. Per i positroni, che nella PET sono «attori protagonisti», la fisica classica non prevedrebbe alcun ruolo.
- ▶ La E di PET allude all'origine dei positroni utilizzati, cioè alla loro emissione, che avviene durante il decadimento radioattivo di particolari isotopi instabili. Anche la radioattività è un fenomeno che la fisica classica non sa spiegare.

Prima di sottoporre un paziente alla PET, gli si inietta la sostanza radioattiva che emette i positroni: per esempio, uno zucchero sintetizzato artificialmente con l'isotopo radioattivo fluoro-18, i cui nuclei decadono rapidamente, con una vita media di circa 160 min, emettendo un positone ciascuno.

I positroni hanno la proprietà di annichilarsi in coppia con gli elettroni. Quando un positone e un elettrone si incontrano, entrambe le particelle scompaiono e la loro massa, in accordo con la relazione di Einstein, si trasforma interamente in energia, emessa sotto forma di raggi gamma.

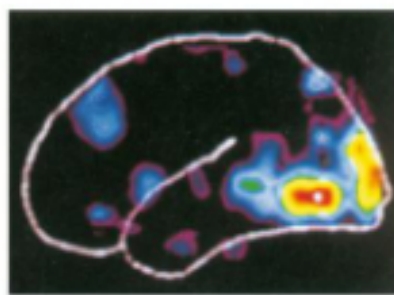
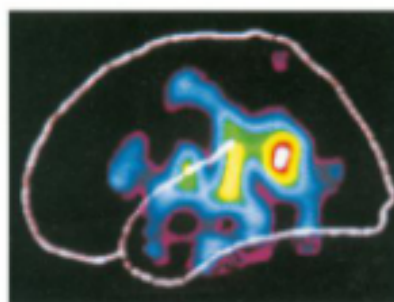
La radiazione gamma generata da questa trasformazione è ben descritta dal modello corpuscolare. Si osserva infatti che, dal punto in cui spariscono le due particelle, emergono due fotoni, cioè due «pacchetti» che contengono (e trasportano alla velocità della luce) la stessa energia e la stessa quantità di moto.

Ogni positone emesso all'interno dell'organismo si ferma entro un paio di millimetri e si annichila assieme a un elettrone atomico. Le coppie di fotoni gamma che si generano vengono captate e trasformate in segnali elettrici dai moltissimi rivelatori del **tomografo**, disposti ad anello attorno al paziente. Da questi segnali, un computer elabora l'immagine.

Lo zucchero radioattivo entra normalmente nei processi chimici che avvengono nelle cellule ed è metabolizzato in misura diversa nelle varie parti del corpo. Le zone in cui affluisce più zucchero sono quelle da cui proviene il maggior numero di fotoni gamma.

Per esempio, quando si esegue un particolare lavoro mentale, come parlare, scrivere, leggere, o ascoltare, il consumo di zucchero si concentra in determinate zone del cervello, che la PET visualizza con precisione millimetrica come nelle **figure a fianco**.

Le immagini prodotte dalla PET non sono fotografie della struttura anatomica degli organi interni, ma sono mappe funzionali. Poiché i cambiamenti funzionali precedono spesso le alterazioni morfologiche, questa tecnica permette la diagnosi precoce di varie malattie, dall'epilessia ai tumori.

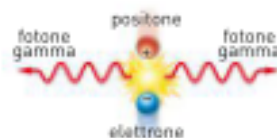


### AL VOLO

#### L'ANNICILAZIONE POSITRONE-ELETTRONE

Il positone ha la stessa massa a riposo dell'elettrone,  $m_0 = 9,11 \times 10^{-31}$  kg.

- ▶ Se un positone e un elettrone si annichilano da fermi, qual è l'energia e qual è, in modulo, la quantità di moto di ciascuno dei due fotoni?



- ▶ Perché i due fotoni si allontanano lungo la stessa direzione e in versi opposti?

$$[8,20 \times 10^{-14} \text{ J}; 2,73 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}]$$



Foto: L. Photo and Video/Shutterstock