

Di qui si vede che  $e$  risulta più grande, quando è più piccolo il rapporto  $b/a$  fra il semiasse minore e il maggiore. Ma un piccolo rapporto semiasse minore/semiasse maggiore comporta, è evidente, una forma più “bislunga” dell’ellisse.

- Può l’eccentricità di un’ellisse essere uguale a 1?  
No, perché la costante dell’ellisse dovrebbe essere uguale alla distanza focale, e l’ellisse, in tali condizioni, degenera in un segmento.
- Può essere  $e = 0$  ?  
Ciò richiederebbe una distanza focale nulla, cioè che i due fuochi siano sovrapposti, coincidenti. In effetti, è possibile pensare coincidenti i due fuochi: la curva si riduce, in questo caso, ad una circonferenza.

In definitiva: **nell’ellisse si ha  $0 \leq e < 1$**  ;  
 $e = 0$  nel caso della circonferenza,  
 mentre in un’ellisse molto “bislunga”, “eccentrica” si ha  $e$  prossimo a 1.

### ALCUNI ESEMPI DI ESERCIZI SULL’ELLISSE CANONICA

#### □ ESEMPIO 1

Disegna e studia l’ellisse di equazione  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Abbiamo  $a^2 = 25$ ,  $b^2 = 9 \rightarrow a = 5$ ,  $b = 3$ .

Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici  $(\pm 5, 0)$ ;  $(0, \pm 3)$ .

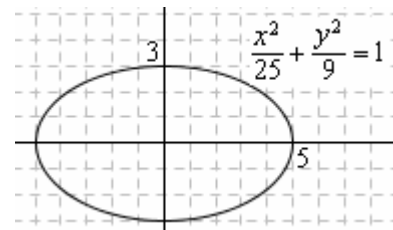
Il semiasse maggiore risulta essere  $a$  (che è il semiasse orizzontale):  
quindi i fuochi sono in orizzontale.

Calcoliamo la semidistanza focale:  
 $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$ .

Perciò i fuochi hanno coordinate  $(\pm 4, 0)$ .

L’eccentricità vale

$$e = c/a = 4/5.$$



#### □ ESEMPIO 2

Disegna e studia l’ellisse di equazione  $4x^2 + 3y^2 = 12$

Prima di tutto dobbiamo portare l’equazione sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A tale scopo, occorre dividere per 12:  
avremo così

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$a^2 = 3, \quad b^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{3}, \quad b = 2.$$

Ci converrà disegnare *immediatamente* i vertici  $(\pm\sqrt{3}, 0)$ ;  $(0, \pm 2)$ .

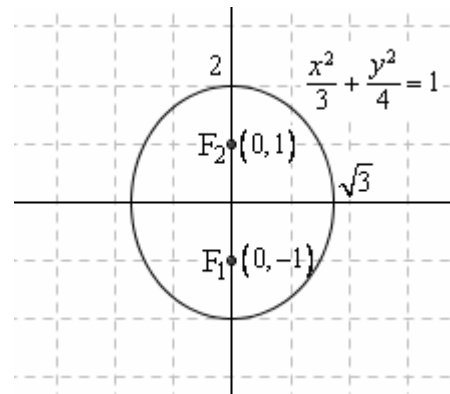
Il semiasse maggiore risulta essere  $b$  (che è il semiasse verticale):  
quindi i fuochi sono in verticale.

Calcoliamo la semidistanza focale:  
 $c^2 = b^2 - a^2 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow c = 1$ .

Perciò i fuochi hanno coordinate  $(0, \pm 1)$

L’eccentricità vale

$$e = c/b = 1/2.$$



□ ESEMPIO 3

Scrivi l'equazione dell'ellisse canonica di costante (= somma costante) 10, passante per (3,1)

Se la costante (= somma costante) è 10, allora la semicostante è 5:

ma allora, sarà  $a=5$  o piuttosto  $b=5$ ?

Beh, facendo un disegno, si vede che di ellissi canoniche con costante 10, passanti per (3,1), ce n'è due: una con i fuochi in orizzontale, e l'altra coi fuochi in verticale.

Il problema ha quindi due soluzioni.

Distinguiamo i due casi:

FUOCHI IN ORIZZONTALE (= asse maggiore orizzontale):  $a=5$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene:  $b^2 = \frac{25}{16}$ .

L'equazione in questo caso è dunque  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1 \rightarrow x^2 + 16y^2 = 25$

FUOCHI IN VERTICALE (= asse maggiore verticale):  $b=5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ , e ponendo la condizione di appartenenza del punto (3,1) si ottiene:  $a^2 = \frac{75}{8}$ .

L'equazione in questo caso è dunque  $\frac{x^2}{\frac{75}{8}} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow 8x^2 + 3y^2 = 75$

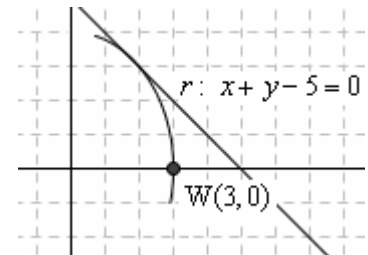
□ ESEMPIO 4

Determina l'equazione dell'ellisse canonica passante per  $W(3,0)$  e tangente alla  $r: x+y-5=0$

Scriviamo l'equazione generale  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Abbiamo ora bisogno di due condizioni, per determinare i due parametri  $a, b$ .

- Una condizione sarà data dall'appartenenza di  $W(3,0)$ ;
- l'altra sarà la condizione di tangenza retta-ellisse, ottenibile ponendo a sistema l'equazione della retta con quella dell'ellisse e imponendo all'equazione risolvente del sistema la condizione  $\Delta = 0$ .



Si ottiene in definitiva:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

□ ESEMPIO 6

Determina l'equazione della retta tangente all'ellisse  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ , nel suo punto A di coordinate (3, 1)

**Quando si ha UNA CURVA “DI 2° GRADO” (ellisse, circonferenza, parabola, iperbole) E UN PUNTO  $P_0(x_0, y_0)$  CHE APPARTENGA (occhio, è indispensabile!) ALLA CURVA, si potrebbe dimostrare che il problema di scrivere L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE A QUELLA CURVA IN QUEL SUO PUNTO si può risolvere semplicemente applicando la seguente comodissima**

**REGOLA DEGLI SDOPPIAMENTI:**

si effettuano, nell'equazione della curva, le sostituzioni

$$x^2 \rightarrow x_0x \quad y^2 \rightarrow y_0y \quad xy \rightarrow \frac{y_0x + x_0y}{2} \quad x \rightarrow \frac{x_0 + x}{2} \quad y \rightarrow \frac{y_0 + y}{2}$$

ed è fatta!

Nel nostro caso, avremo  $\frac{3x}{12} + \frac{1 \cdot y}{4} = 1$  ossia  $x + y = 4$ .

Controlla tu stesso che col “metodo del  $\Delta = 0$ ” si otterrebbe la medesima equazione.