

fare un'analisi delle mosse migliori, o delle mosse buone o di quelle cattive, con un ragionamento profondo che richiederebbe che qualcuno si fosse messo lì e ci avesse pensato attentamente. Questa allora diventa matematica e implica il ragionamento astratto. Un altro esempio è l'uso dei calcolatori. Se avete un interruttore che è aperto o chiuso, non c'è niente di molto matematico, sebbene i matematici amino cominciare da lì i loro ragionamenti. Ma per calcolare che cosa farà un sistema molto grande con i suoi complicati circuiti, c'è bisogno della matematica.

Vorrei dire subito che la matematica ha un'applicazione importantissima in fisica nella discussione di fenomeni dettagliati in situazioni complicate, quando si conoscano le regole fondamentali del gioco. Questo è un punto cui dedicherei la maggior parte del tempo se stessi parlando solo della relazione della matematica e della fisica. Ma poiché questa fa parte di una serie di conferenze sul carattere della legge fisica, non ho tempo per discutere quello che accade in situazioni complicate, e passerò subito invece a un altro problema, cioè il carattere delle leggi fondamentali.

Se torniamo al nostro gioco di dama, le leggi fondamentali sono quelle secondo cui si muovono le pedine. La matematica può essere applicata nella situazione complessa per prevedere qual è una buona mossa da fare in una determinata circostanza. Però occorre ben poca matematica a causa del carattere fondamentalmente semplice delle leggi di base, che in questo caso possono essere espresse semplicemente in italiano.

La cosa strana della fisica è che anche per

formulare le leggi fondamentali abbiamo bisogno della matematica. Darò due esempi, uno in cui non ne abbiamo bisogno, e uno in cui invece ne abbiamo bisogno. Primo: c'è una legge in fisica chiamata legge di Faraday, che dice che nell'elettrolisi la quantità di materiale che è depositata è proporzionale alla corrente e al tempo in cui passa la corrente. Questo significa che la quantità di materiale depositato è proporzionale alla carica che attraversa il sistema. Tutto questo sembra molto matematico, ma quello che sta effettivamente accadendo è che gli elettroni che percorrono il filo portano ciascuno una carica. Per prendere un esempio particolare, per depositare un dato atomo è necessario che passi un elettrone, cosicché il numero di atomi depositati è necessariamente uguale al numero di elettroni che passano, dunque proporzionale alla carica che scorre lungo il filo. Così questa legge che sembra matematica non ha come sua base niente di molto profondo, e non richiede nessuna reale conoscenza di matematica. Che per depositare un atomo sia necessario un elettrone è in un certo senso una affermazione matematica, ma non è certamente il tipo di matematica di cui sto parlando qui.

D'altra parte, prendete la legge di Newton per la gravitazione, che ha gli aspetti che ho discusso la volta scorsa. Vi ho dato l'equazione

$$F = G \frac{m m'}{r^2}$$

proprio per rendervi evidente la velocità con cui i simboli matematici possono trasmettere l'informazione.

Ho detto che la forza è direttamente proporzionale al prodotto delle masse dei due oggetti, e inversamente al quadrato della distanza tra loro. Ho anche detto che i corpi reagiscono alle forze cambiando di velocità, o cambiando il loro moto nella direzione della forza, proporzionalmente alla forza e inversamente alle loro masse. Queste sono certo parole esatte e non era strettamente necessario che scrivessi l'equazione. Ciò nonostante è in un certo senso matematica, e ci domandiamo come questa possa essere una legge fondamentale. Che cosa fa il pianeta? Guarda il sole, vede quanto è distante e decide di calcolare sulla sua addizionatrice interna l'inverso del quadrato della distanza, che gli dice come si deve muovere? Questa non è certamente una spiegazione del meccanismo della gravitazione! Potreste voler guardare più in là, e varie persone hanno cercato di farlo. A Newton fu detto, a proposito della sua teoria: "Ma non vuol dire niente, non ci dice niente." Ed egli rispose così: "Vi dice *come* si muove. Questo dovrebbe esser sufficiente. Vi ho detto come si muove, e non perché." Ma la gente spesso è insoddisfatta senza un meccanismo, e io vorrei descrivere una teoria, fra le tante che sono state inventate, proprio del tipo che potreste volere voi. Questa teoria suggerisce che l'effetto è il risultato di un gran numero di azioni, ciò che spiegherebbe perché è matematica.

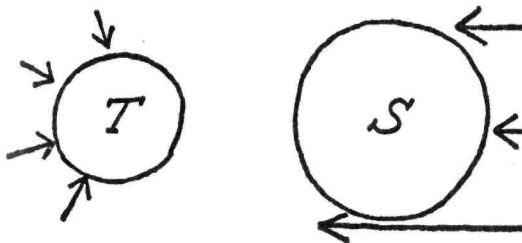


Figura 8

Supponiamo che nell'universo, in ogni parte, ci siano moltissime particelle, che ci attraversano a grandissima velocità. Esse arrivano ugualmente da tutte le direzioni, passandoci vicino, e ogni tanto ci colpiscono come in un bombardamento. Noi e il sole siamo praticamente trasparenti per loro, praticamente ma non completamente, e alcune di esse ci colpiscono. Guardate dunque quello che succederebbe (fig. 8). *S* è il sole e *T* la terra. Se non ci fosse il sole, le particelle bombarderebbero la terra da tutte le parti, producendo con i loro urti degli impulsi. Questo non farebbe muovere la terra in una direzione particolare perché esse arriverebbero tanto da una parte come dall'altra, dall'alto come dal basso. Invece, essendoci il sole, le particelle che arrivano da quella direzione sono in parte assorbite dal sole, perché alcune lo colpiscono ma non lo attraversano. Perciò il numero di quelle che vengono dalla direzione del sole verso la terra è minore di quello delle particelle che vengono dalle altre parti, perché trovano un ostacolo, il sole. È facile vedere che più lontano è il sole, più piccola è la proporzione delle particelle provenienti da tutte le direzioni che vengono assorbite. Il sole apparirà più piccolo, anzi più piccolo

proprio inversamente al quadrato della distanza. Perciò sulla terra ci sarà un impulso verso il sole che varia inversamente con il quadrato della distanza. E questo sarà il risultato di un gran numero di operazioni molto semplici, cioè dei colpi, uno dopo l'altro da tutte le direzioni. Per questo la stranezza della relazione matematica sarà molto ridotta, perché l'operazione è molto più semplice che il calcolare l'inverso del quadrato della distanza. Questo modello, con le particelle che colpiscono da tutte le direzioni, fa il calcolo per voi.

L'unico guaio in questo schema è che, per altre ragioni, non funziona. Ogni teoria che si inventa deve essere analizzata in *tutte* le sue possibili conseguenze, per vedere se predice qualche altra cosa, e questo schema predice invero qualcos'altro. Se la terra si muove, più particelle la colpiranno davanti che dietro. (Se correte nella pioggia, una maggiore quantità di acqua vi colpisce la faccia che la parte posteriore della testa, perché state correndo verso la pioggia.) Così, se la terra si muove, essa corre contro le particelle che vengono verso di essa, e via da quelle che la rincorrono dal di dietro. Così più particelle la colpiranno dalla parte anteriore che da quella posteriore, e ci sarà una forza che si oppone al suo moto. Questa forza rallenterebbe la terra nella sua orbita, e il suo moto non sarebbe certo durato i tre o quattro miliardi di anni (almeno) durante i quali essa ha ruotato intorno al sole. Così questa è la fine della teoria. “Era piuttosto buona — voi direte — e per un po' ci eravamo liberati della matematica. Forse noi potremmo inventarne una migliore.” Può darsi che possiate, perché nessuno

conosce la risposta definitiva, ma finora, dal tempo di Newton, nessuno ha ancora inventato un'altra descrizione teorica del meccanismo matematico che sta dietro a questa legge che non dica la stessa cosa, o che non renda la matematica più difficile, o che non predica dei fenomeni errati. Oggigiorno, dunque, non esiste nessun altro modello della teoria della gravitazione in un'altra forma che non sia quella matematica.

Se questa fosse l'unica legge a carattere matematico, la cosa sarebbe curiosa e anche un po' fastidiosa. Ma quello che veniamo a scoprire è diverso: più investighiamo, più leggi troviamo, più profondamente penetriamo nella natura, più la malattia persiste: ognuna delle nostre leggi è un'affermazione puramente matematica, in un linguaggio piuttosto astruso e complesso. L'enunciato di Newton della legge della gravitazione è una matematica abbastanza semplice. Diventa sempre più astrusa e difficile a mano a mano che andiamo avanti. Perché? Non ne ho la più pallida idea. Adesso il mio scopo è solamente di parlarvi di questo fatto. In questa lezione mi propongo solo di mettere in evidenza il fatto che è impossibile spiegare onestamente e fare apprezzare le bellezze delle leggi della natura a chi non ha una profonda conoscenza della matematica. Mi dispiace, ma sembra proprio essere così.

Voi mi potreste dire: “Allora, se non c'è nessuna spiegazione della legge, almeno ci dica *che cos'è* la legge. Perché non dirla a parole invece che a simboli? La matematica è solo un linguaggio, e noi vogliamo poterlo tradurre.” In effetti, con pazienza, posso farlo, e credo di averlo in parte fatto. Potrei andare un po' oltre e

spiegare più dettagliatamente che l'equazione significa che se la distanza è doppia, la forza è un quarto e così via: potrei cambiare tutti i simboli in parole. In altre parole potrei essere gentile con i profani che se ne stanno lì ad aspettare che io spieghi loro qualcosa. Ci sono autori che si sono fatti una fama per la loro abilità nello spiegare al profano nel suo linguaggio questi argomenti difficili e astrusi. Così il profano passa da un libro all'altro nella speranza di evitare le complessità che alla fine subentrano, anche con il miglior espositore di questo tipo. Ma più si legge, più la confusione aumenta e ci si trova di fronte a un'affermazione complicata dopo l'altra, una cosa difficile da capirsi dopo l'altra, tutte apparentemente slegate fra di loro. Il tutto diventa oscuro, e il lettore spera che forse in un altro libro ci sarà una spiegazione... L'autore ce l'ha quasi fatta, forse un altro ce la farà del tutto.

Ma io non credo che sia possibile, perché la matematica *non* è semplicemente un'altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, è cioè uno strumento per ragionare. In effetti è una grande raccolta dei risultati dell'attento ragionamento di varie persone. Per mezzo di essa è possibile collegare un'affermazione a un'altra. Per esempio, posso dirvi che la forza è diretta verso il sole, e posso anche dirvi, come ho già fatto, che il pianeta si muove in modo che, se traccio una retta dal sole al pianeta, e ne traccio un'altra dopo un tempo definito, come tre settimane, l'area che è percorsa dal pianeta è esattamente uguale a quella che sarà percorsa nelle tre settimane seguenti, e così via mentre ruota intorno al sole. Posso spiegare in dettaglio queste

affermazioni, ma non posso spiegare perché dicono la stessa cosa. Le complessità evidentemente enormi della natura, con tutte le sue strane leggi e regole, ognuna delle quali vi è stata attentamente spiegata, sono in realtà legate in maniera molto stretta. Tuttavia se non apprezzate la matematica non potete capire, tra la grande varietà di fatti, che la logica vi permette di passare da uno all'altro.

Sembrerebbe incredibile che io possa dimostrare che aree uguali sono percorse in tempi uguali se le forze sono dirette verso il sole. Così, se me lo permettete, vi darò una dimostrazione per farvi vedere che le due cose sono veramente equivalenti, in modo da farvi comprendere più che il solo enunciato delle leggi.

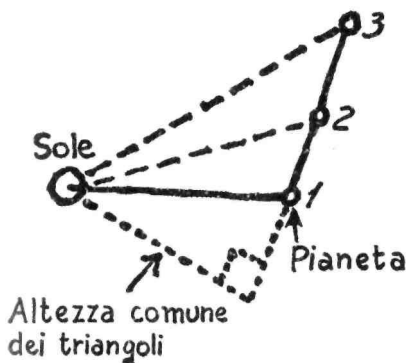


Figura 9

Vi farò vedere che le due leggi sono collegate in modo che il solo ragionamento vi porterà dall'una all'altra, e che la matematica è solo un ragionamento organizzato. Allora comprenderete la bellezza della relazione fra le due affermazioni. Dimostrerò che se le



forze sono dirette verso il sole, aree uguali sono spazzate in tempi uguali.

Cominciamo dal sole e da un pianeta (fig. 9), e immaginiamo che a un certo momento il pianeta sia nella posizione 1. Esso si sta muovendo in modo tale, che, diciamo, un secondo più tardi esso è arrivato nella posizione 2; se il sole non esercitasse una forza sul pianeta, questo, per il principio d'inerzia di Galileo, continuerebbe ad andare in linea retta. Così, dopo lo stesso intervallo di tempo, nel secondo seguente esso percorrerebbe esattamente la stessa distanza, e arriverebbe nella posizione 3. Cominciamo a dimostrare che se la forza *non c'è*, aree uguali sono percorse in tempi uguali. Vi ricordo che l'area del triangolo è metà della base per l'altezza, e che l'altezza è la distanza del vertice dalla base. Se il triangolo è ottuso (fig. 10), allora l'altezza è la verticale  $AD$  e la base è  $BC$ . Ora confrontiamo le aree che sarebbero percorse se il sole non esercitasse nessuna forza (fig. 9). Le due distanze 1-2 e 2-3 sono uguali, ricordatelo.

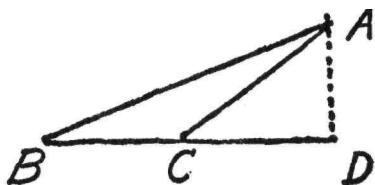


Figura 10

Resta da vedere se le due aree sono uguali. Considerate il triangolo formato dal sole e dai due punti 1 e 2. Qual è la sua area? È la base 1-2, moltiplicata per metà dell'altezza, cioè della perpendicolare dalla base a

S. E per l'altro triangolo, quello del moto da 2 a 3? La sua area è la base 2-3 per la metà dell'altezza da S. Questi due triangoli hanno la stessa altezza, e, come ho fatto notare, la stessa base, per cui hanno la stessa area. Fin qui tutto bene. Se non ci fosse nessuna forza esercitata dal sole, aree uguali sarebbero percorse in tempi uguali. Ma la forza del sole c'è. Durante l'intervallo 1-2-3 il sole sta tirando e cambiando il moto in varie direzioni verso sé stesso. Per avere una buona approssimazione prenderemo la posizione centrale, o posizione media, in 2, e diremo che tutto l'effetto durante l'intervallo 1-3 è stato di cambiare il moto di una certa quantità nella direzione della linea 2-S (fig. 11).

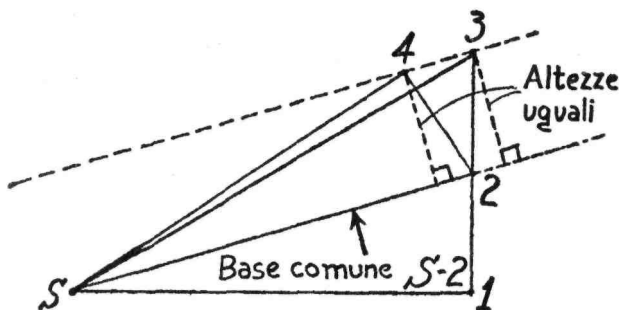


Figura 11

Ciò significa che le particelle che si sarebbero mosse sulla retta 1-2, e, se non ci fosse stata forza avrebbero continuato a muoversi sulla stessa linea nel secondo seguente, a causa dell'influenza del sole hanno alterato il loro moto di una certa quantità parallela alla retta 2-S; il moto seguente è dunque una composizione di quello che il pianeta vorrebbe fare e del cambiamento

che gli è stato impresso dall'azione del sole. Così in effetti il pianeta non va a finire nella posizione 3, ma nella posizione 4. Ora vorremmo confrontare le aree dei triangoli  $S_{23}$  e  $S_{24}$ , e vi farò vedere che sono uguali. Hanno la stessa base  $S-2$ . Hanno anche la stessa altezza? Certamente, perché sono compresi fra rette parallele. La distanza da 4 alla retta  $S-2$  è uguale alla distanza da 3 alla retta  $S-2$  (prolungata). Perciò l'area del triangolo  $S_{24}$  è uguale a quella di  $S_{23}$ . Ho dimostrato prima che  $S_{12}$  e  $S_{23}$  hanno area uguale, così sappiamo ora che  $S_{12} = S_{24}$ . Così nel moto orbitale effettivo dei pianeti le aree percorse nel primo secondo sono uguali a quelle percorse nel secondo seguente. Perciò, col ragionamento, possiamo vedere una connessione tra il fatto che la forza è in direzione del sole e il fatto che le aree sono uguali. Non è ingegnoso? L'ho preso direttamente da Newton: viene tutto dai *Principia*, il diagramma e il resto. Solo le lettere sono diverse, perché egli scriveva in latino, mentre io ho usato i numeri arabi.

Nel suo libro Newton dava tutte le sue dimostrazioni in forma geometrica. Oggi non usiamo questo tipo di ragionamento, ma piuttosto un ragionamento analitico con simboli. Richiede una notevole abilità tracciare i triangoli giusti, accorgersi delle aree, e calcolare come si deve fare. Ci sono però stati dei perfezionamenti nei metodi di analisi, che oggi sono più veloci e più efficienti. Voglio farvi vedere come procede la dimostrazione con la notazione della matematica moderna, dove per dedurre il risultato non si fa niente altro che scrivere un sacco di simboli.

Vogliamo parlare della velocità areolare, cioè la