



Università  
Ca' Foscari  
Venezia

Corso di Laurea magistrale  
in Scienze filosofiche

Tesi di Laurea

"Ciò che non ha parti".

Il punto e l'unità nella matematica pre-  
euclidea.

—  
Ca' Foscari  
Dorsoduro 3246  
30123 Venezia

**Relatore**

Ch. Prof. Paolo Pagani

**Laureando**

Elisa De Grandis

Matricola 812340

**Anno Accademico**

2011-2012

# INDICE

INTRODUZIONE.....	1
<u>PARTE PRIMA. IL PUNTO GEOMETRICO E LO SPAZIO.....</u>	<u>3</u>
CAPITOLO 1. PUNTO E UNITÀ NELLA FILOSOFIA PITAGORICA.....	4
1. Ciò che non ha parti.....	4
2. L'aritmo geometria.....	8
CAPITOLO 2. LA SCOPERTA DELL'INCOMMENSURABILITÀ.....	14
1. Casi notevoli di incommensurabilità.....	14
2. Matematiche pre-elleniche ed elleniche a confronto.....	21
3. La riformulazione del concetto di λόγος.....	23
4. L'infinito nel mondo greco.....	28
5. Le grandezze irrazionali in alcuni passi platonici.....	31
CAPITOLO 3. IL PUNTO INESTESO E LO SPAZIO CONTINUO.....	37
1. La nuova concezione di punto.....	37
2. Lo spazio continuo.....	41
3. I paradossi di Zenone.....	43
4. La concezione platonica dello spazio.....	49
5. La concezione aristotelica dello spazio.....	56
CAPITOLO 4. LE DEFINIZIONI DEL PRIMO LIBRO DEGLI <i>ELEMENTI</i> .....	61
1. Gli <i>Elementi</i> di Euclide.....	61
2. Le definizioni di punto.....	65
3. Altre definizioni notevoli.....	68
<u>PARTE SECONDA. L'UNITÀ E IL NUMERO.....</u>	<u>73</u>
CAPITOLO 5. CONTINUO E DISCRETO, GEOMETRIA E ARITMETICA.....	74
1. Il punto e l'unità.....	74
2. Il numero.....	76
3. Esprimere gli irrazionali con i numeri: la sequenza delle diagonali effabili.....	81
4. La rottura dell'aritmo geometria.....	85
CAPITOLO 6. IL NUMERO IN ARISTOTELE.....	88
1. Il numero come numero naturale.....	88
2. Razionale e irrazionale, aritmetica e geometria.....	91
3. Lo statuto ontologico degli enti matematici.....	95
4. L'uno e l'unità di misura.....	99
CAPITOLO 7. IL NUMERO NEGLI <i>ELEMENTI</i> DI EUCLIDE.....	102
1. Unità e numero.....	102
2. Operare con gli irrazionali. Il Libro II e il Libro X.....	105
3. Alcune osservazioni sulla teoria delle proporzioni.....	110

CAPITOLO 8. LA POSIZIONE PLATONICA: L'APERTURA A UN NUOVO CONCETTO DI NUMERO?.....	113
1. Le dottrine non scritte: l'Uno e la Diade.....	113
2. Il numero nelle dottrine non scritte.....	117
3. Il numero come numero naturale.....	121
4. Un'apertura a un nuovo concetto di numero?.....	125
CONCLUSIONI.....	134
APPENDICE.....	138
1. Una dimostrazione intuitiva del teorema di Pitagora.....	138
2. Il teorema di Pitagora dimostrato in Elementi, I, 47.....	139
3. L'incommensurabilità di lato e diagonale del pentagono con l'ἀνθυπαίρεσις.....	140
4. La divisione di un segmento in media ed estrema ragione.....	142
5. La relazione di proporzionalità aurea nel pentagono.....	143
6. L'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato con procedimento aritmetico. .....	144
7. L'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato con l'ἀνθυπαίρεσις.....	145
8. La sequenza delle diagonali effabili in Elementi, II, 10.....	147
9. Due dimostrazioni relative alla frazione continua per il calcolo di $\sqrt{2}$ .....	148
BIBLIOGRAFIA.....	150

## INTRODUZIONE

“Punto è ciò che non ha parti”. Così si apre quella che fu, con ogni probabilità, l'opera matematica più importante del mondo greco: gli *Elementi* di Euclide. Si tratta di un'affermazione apparentemente banale: il punto viene definito come il costitutivo minimo ed indivisibile dello spazio geometrico; tuttavia, se esaminata attentamente, essa rivela al lettore uno spessore e una ricchezza incredibili.

In primo luogo, essa è sempre stata interpretata, non a torto, come una decisa affermazione dell'inesistenza del punto, e quindi, di fatto, della sua idealità: privato della sua estensione fisica, il punto doveva essere pensato come un ente di ragione. Gli *Elementi* si aprirebbero, quindi, con un'implicita dichiarazione riguardante lo statuto ontologico degli enti matematici; dichiarazione non ovvia, se si considera che i Pitagorici, fondatori della matematica greca, avevano pensato i numeri come immanenti alle cose sensibili. In secondo luogo, la definizione proposta negli *Elementi* ricalca fedelmente la definizione di *punto* proposta dalla tradizione, la quale a sua volta è identica a quella di *unità*: si potrebbe quindi vedere nelle parole di Euclide una sorta di tributo alla matematica pitagorica, nella quale il punto e l'unità erano perfettamente sovrapponibili.

In qualche modo, è proprio da questa definizione che la mia ricerca prende avvio. Oggetto principale della mia indagine sono, infatti, i concetti gemelli di punto e di unità; in particolare, ne ho voluto analizzare gli intrecci e le evoluzioni: attraverso lo studio di questi due concetti, ho inteso indagare le realtà di cui essi sono principi: la geometria e l'aritmetica, mettendone in luce in questo modo i presupposti.

Punto di partenza cronologico della mia ricerca è la matematica pitagorica, segnata dalla perfetta corrispondenza tra piano aritmetico e geometrico. Il punto, minimo indivisibile di estensione spaziale, assimilato ad un granellino di sabbia o ad un sassolino, veniva definito “unità avente posizione”. Tuttavia, negli *Elementi* di Euclide, ma già in Aristotele, troviamo che tra l'universo del numero e quello della figura si era venuta a creare una profonda cesura: realtà che avevano legittima esistenza sul piano geometrico, non trovavano più corrispondenza sul piano aritmetico.

Dunque, i concetti di punto e unità che si ritrovano negli *Elementi* rappresentano l'esito di un processo di ripensamento e di ridefinizione dei concetti cardinali della matematica, processo che dovette aver luogo indicativamente nel corso del V secolo a. C., e

che sembra essere strettamente legato alla progressiva presa di coscienza che non tutte le coppie di grandezze possono essere misurate con la stessa unità di misura, o, in altre parole, che esistono coppie di grandezze prive di λόγος. Da un lato, questa scoperta doveva aver imposto come necessario il ripensamento del punto e dello spazio geometrico, portando ad una rielaborazione dello stesso sistema assiomatico sul quale la geometria pitagorica era fondata. Dall'altro, tuttavia, non sembra che essa sia stata uno stimolo sufficiente ad imporre anche la rielaborazione del concetto di unità e di numero.

Il presente lavoro di tesi si struttura in due metà. Nella prima ho inteso studiare le evoluzioni dello spazio geometrico e il suo progressivo separarsi concettualmente dallo spazio fisico in epoca pre-euclidea. Sebbene della matematica di questo periodo si sappia molto poco, essa fu estremamente feconda, magmatica, ed è in quest'epoca che si determinarono molti dei presupposti su cui si fondò tutta la matematica successiva. Nella seconda metà ho invece focalizzato la mia attenzione sul versante dell'aritmetica, indagando le ragioni che resero sostanzialmente impossibile un ripensamento del numero tale da garantire il mantenimento della corrispondenza tra aritmetica e geometria. Tracce di una possibile, seppur solo abbozzata, apertura ad un concetto più ampio e moderno di numero potrebbero trovarsi nel pensiero matematico di Platone: mi occuperò, nell'ultimo capitolo di questo lavoro di tesi, di sviscerare la questione, mostrando la complessità e la profondità del pensiero matematico di questo filosofo.

**PARTE PRIMA**  
**IL PUNTO GEOMETRICO E LO SPAZIO**

# CAPITOLO 1. PUNTO E UNITÀ NELLA FILOSOFIA PITAGORICA

## 1. Ciò che non ha parti.

I Pitagorici supposero che [...] i numeri fossero le cose sensibili, poiché constatarono che molte proprietà dei numeri sono presenti nei corpi sensibili. Quindi supposero i numeri non come separati, ma come costitutivi immanenti delle cose sensibili<sup>1</sup>.

Così scrive Aristotele, presentando un concetto cardine della filosofia dei "cosiddetti Pitagorici"<sup>2</sup>: il ruolo di principio svolto dai numeri, non solo nei confronti della realtà matematica, ma anche di quella stessa realtà fisica, materiale, che i primi filosofi stavano cercando in quel periodo di giustificare.

Se è eccessivo individuare in Pitagora il fondatore della matematica greca, è altresì vero che molte delle scoperte e molti dei concetti sviluppatasi in seno alla sua scuola sono stati determinanti nella formazione del successivo pensiero matematico. Pertanto mi sembra indispensabile, come premessa della ricerca che qui prende avvio, approfondire tale relazione tra numeri e cose, relazione destinata a ritornare come un *leitmotiv* nel corso di tutto il pensiero matematico greco, emergendo con particolare forza in un autore come Platone.

Parallela e complementare a tale indagine, sarà quella che approfondirà il legame vigente tra numeri e figure, e tra i concetti gemelli di punto e di unità. Principi, l'uno della realtà geometrica, l'altro di quella aritmetica, tali concetti sono accomunati dal designare enti *che non hanno parti*, e vengono pensati in analogia l'uno all'altro fino ad una quasi completa assimilazione. La concezione che i Pitagorici ebbero di questi due enti è, come si vedrà, intuitiva; tuttavia perfettamente funzionale alla loro filosofia della matematica. Nel corso di questo lavoro di tesi mi occuperò appunto di esaminare le difficoltà che si sono

1 ARISTOTELE, *Metafisica*, N 3, 1090 a 20-25.

2 Quella fondata da Pitagora fu una scuola, e per molti versi anche una vera e propria setta. Nonostante la tradizione attribuisca a Pitagora stesso molte delle scoperte matematiche e delle posizioni filosofiche della scuola, possiamo con certezza asserire che ben poco di quanto c'è tramandato sotto il suo nome può essergli attribuito direttamente. Per questo, utilizzerò di preferenza, all'interno di questo lavoro, le espressioni "i Pitagorici" o "i cosiddetti Pitagorici".

sviluppate attorno a tali concetti, e i ripensamenti e le evoluzioni in cui essi sono stati coinvolti. L'arco temporale che prenderò in considerazione è quello che va dalla nascita della matematica greca fino ad Euclide; pertanto i concetti di punto e di unità, così come li ritroviamo nella filosofia dei primi Pitagorici, rappresentano, ai fini di questo lavoro, un imprescindibile punto di partenza.

### ***Unità.***

Che cos'era, precisamente, il *numero* per i cosiddetti Pitagorici? Scrive Ludovico Geymonat:

Senza dubbio, col termine «numeri» i Pitagorici intendevano soltanto i numeri interi, concepiti come collezioni di pure unità (tutte eguali fra loro). Non pare che essi abbiano fatto particolari indagini sulla natura di queste unità<sup>3</sup>.

Dunque, nel momento in cui si parla di numeri, ci si riferisce a quelli che oggi sono noti come numeri naturali: 1, 2, 3, 4,..., e solo ad essi.

Circa un secolo dopo Cristo, Teone di Smirne scrive:

Il numero è una raccolta di monadi, o una progressione della moltitudine che parte e ritorna alla monade. [...] La monade, quindi, come numero, è indivisibile<sup>4</sup>.

Tale concetto di numero è il più semplice e più primitivo, posseduto (come sembra da alcuni studi), persino da alcune specie animali<sup>5</sup>. Alla base del concetto di numero c'è l'azione del contare, la quale si riferisce sempre a gruppi di elementi (uomini, sedie, alberi), ciascuno dei quali corrispondente ad un'unità, a un numero *uno*.

È chiaro che, fintantoché il concetto di numero resta legato al contare, le unità che compongono i numeri stessi vengono spontaneamente (e necessariamente) pensate come

3 L. GEYMONAT, *Storia della matematica*, in AA.VV., *Storia delle Scienze*, Vol. 1, a cura di Nicola Abbagnano, UTET, Torino 1962, p. 313.

4 TEONE DI SMIRNE, *Matematica utile per la comprensione di Platone*, par. III. L'edizione di riferimento è: *Theon of Smyrna: Mathematics useful for understanding Plato*, translated from the 1892 Greek/French edition of J. Dupuis, a cura di R. & D. Lawlor, Wizard Bookshelf, San Diego 1979; traduzione dall'inglese mia.

5 Cfr. L. L. CONANT, *The number concept. Its origin and development*, Macmillan and Co., New York 1896, p. 7.



indivisibili. In un insieme di cavalli possono esserci tre elementi, nella mia mano possono esserci tre dita aperte, ma senz'altro non posso avere  $\frac{3}{4}$  di cavallo o  $\frac{3}{4}$  di dito.

Certamente non possiamo dire che i Pitagorici furono consci di tutto ciò, tuttavia la loro concezione di numero chiaramente reca le tracce della genesi di questo concetto. L'unità viene quindi pensata come un indivisibile, come *ciò che non ha parti*, senza che ci sia coscienza che questo è solo uno dei possibili modi di intenderla.

Dall'universo del numero vengono quindi bandite tutte quelle quantità che non siano riconducibili ad una somma di unità.  $\frac{3}{4}$ , ad esempio, non è un numero; al massimo, può essere considerato come un rapporto tra numeri, un *lóγος*, e quindi come una coppia ordinata di numeri (in questo caso 3 e 4), ma sicuramente non come una parte di un *uno*.

### ***Punti.***

Non è possibile avere un'adeguata conoscenza del concetto di unità senza esaminare quello che nella filosofia pitagorica fu il suo concetto gemello: il *punto*. Com'è noto, infatti, il principio primo e indivisibile del numero era assimilato in modo pressoché completo al principio primo dell'ente geometrico. Equivalenti nella loro essenza, si distinguevano solo per il fatto che il punto era pensato come *avente una posizione*, ossia come collocato all'interno di uno spazio fisico (il che chiaramente non era possibile per l'unità).

Scriva Proclo:

Ma poiché i Pitagorici definiscono il punto come unità che, in più, prende posizione, si tratta di esaminare cosa mai hanno inteso dire. [...] L'unità è senza posizione in quanto è immateriale e fuori di ogni dimensione e luogo. Posizione ha invece il punto, in quanto appare nei recessi dell'immaginazione, ed è quindi materializzato<sup>6</sup>.

Tale definizione di punto come “unità dotata di posizione”, con la conseguente sovrapposizione dei due concetti, sarà destinata anch'essa a consolidarsi nel successivo

6 PROCLIO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, parr. 96-97. L'edizione di riferimento è quella a cura di Maria Timpanaro Cardini, Giardini Editori e Stampatori in Pisa, Pisa 1978;

sviluppo del pensiero matematico, ritornando con forza in autori successivi. Leggiamo, ad esempio, in Aristotele:

Orbene, ciò che è indivisibile secondo la quantità e in quanto quantità, e che è indivisibile in tutte le dimensioni e non ha posizione, si chiama unità; invece, ciò che è indivisibile in tutte le dimensioni ma ha una posizione, si chiama punto<sup>7</sup>.

Occorre ora fare una digressione sulla natura di questi punti. Dalla scuola elementare, a tutti noi è stato insegnato che il punto è un'entità priva di lunghezza, larghezza e profondità: si tratta quindi di un ente geometrico inesteso, a dimensione *zero*. Tuttavia, è evidente che il modo più naturale e spontaneo di pensare al punto è di immaginarlo come un granellino di sabbia, come il segno che lascia la punta di uno spillo. Dunque, come un ente che, per quanto piccolo e assolutamente non divisibile, è esteso. Ed è così che i Pitagorici intendono il punto: un minimo di estensione geometrica, assimilabile ad un seme o ad un sassolino; si potrebbe dire, un ente a dimensione *uno* (come si è già visto, l'*uno* è il minimo sotto cui non si può scendere): non sorprende, quindi, la sovrapposizione punto-unità già anticipata.

### ***I numeri e le cose.***

Fatta questa premessa, occorre capire in che senso si può dire che i Pitagorici supposero che “i numeri fossero le cose sensibili”. Si tratta di un'affermazione che può essere letta su un doppio piano.

Da un lato si osserva che, come si è visto, i numeri erano pensati in analogia con i punti geometrici, in tutto e per tutto ad essi sovrapponibili. Questi a loro volta erano pensati come *estesi*, non solo nell'immateriale ed astratto spazio geometrico, ma anche nello spazio fisico, tangibile, in cui si trovano le cose e l'uomo: si trattava quindi di punti dotati di *realtà materiale*, di *atomi*. La scelta di quest'ultima parola, con i riferimenti alle teorie democritee che essa implica, non è casuale. Il punto pitagorico, infatti, essendo *materiale*, non era solo il principio della realtà geometrica, ma poteva anche svolgere il ruolo di costitutivo fisico, in senso stretto, delle cose.

7 ARISTOTELE, *Metafisica*, Δ 6, 1016 b 24-26.

Tale lettura è supportata dallo stesso Aristotele:

Sembra [...] che essi [i Pitagorici] attribuiscono ai loro elementi la funzione di materia: infatti essi dicono che la sostanza è composta e costituita da questi elementi come parti immanenti ad essa<sup>8</sup>.

Scrive Reale:

Per noi il numero è frutto delle operazioni della nostra mente, è frutto di astrazione, e quindi è un ente di ragione; vice versa, per l'antico modo di pensare (e tale modo di pensare sarà corretto solo da Aristotele), *il numero è una cosa reale, anzi, la più reale delle cose*, e, proprio come tale, può essere principio costitutivo delle altre cose<sup>9</sup>.

Dall'altro lato, i Pitagorici rivelarono un forte interesse per la presenza di rapporti matematici nel mondo che li circondava. In tal senso, essi furono attenti indagatori della realtà in tutte le sue sfaccettature: studiarono le regolarità nel moto degli astri, trovarono le leggi matematiche che stanno alla base dell'armonia e degli accordi musicali, ricercarono le costanti numeriche celate nelle figure geometriche notevoli (su questo punto, ritorneremo abbondantemente più avanti). Tale ricerca era motivata dalla fiducia che lo studio dei rapporti numerici nascosti all'interno delle cose (tanto materiali, quanto immateriali), potesse fornire la chiave per una più profonda comprensione della realtà, e svelare l'intima natura delle cose stesse. È significativo notare, a questo riguardo, che il termine usato per indicare il rapporto tra due numeri o due grandezze fosse proprio *λόγος*.

## **2. L'aritmo geometria.**

Vediamo ora in modo più approfondito gli esiti di questa corrispondenza tra punto e unità. Abbiamo visto come i due concetti siano, nella loro essenza, identici. Pertanto, anche le realtà di cui essi sono principio non sono altro che due lati della stessa medaglia. Per i Pitagorici, come del resto per tutti i pensatori matematici successivi, le realtà geometriche dovevano avere un immediato corrispettivo aritmetico, e, viceversa, le formule aritmetiche

8 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 5, 986 b 5-8.

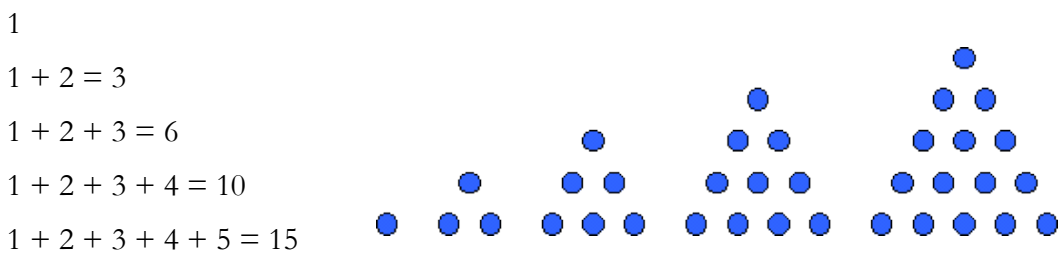
9 G. REALE, *Storia della filosofia antica*, Vita e pensiero, Milano 1984, p. 92.

dovevano poter essere osservate anche geometricamente, poiché le due realtà erano indissolubilmente legate fino ad essere logicamente ed ontologicamente inscindibili.

***Numeri piani, solidi, poligonali.***

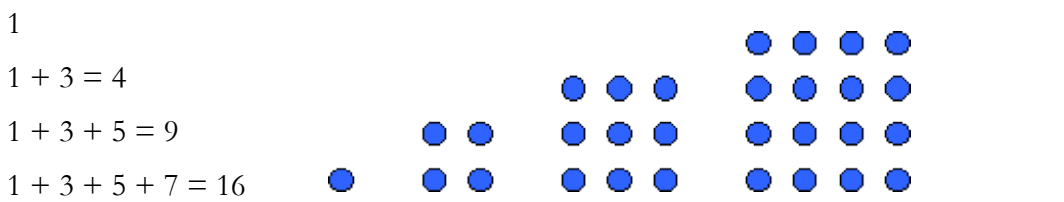
Come è stato spiegato poco sopra, per i Pitagorici un numero altro non era che un insieme di unità, le quali erano a loro volta assimilabili a punti geometrici. Pertanto, un numero poteva essere rappresentato in forma geometrica come un insieme di punti (tanti quanti sono le unità in esso contenute), aventi una determinata disposizione nel piano. I cosiddetti Pitagorici ebbero un grande interesse per questa teoria: essi, da un lato analizzavano le proprietà di un numero in base alle figure che con esso si potevano comporre, dall'altro studiavano le figure, cercando di risalire alle quantità numeriche necessarie a costituirle.

Essi, ad esempio, osservarono che alcuni numeri avevano forma di triangolo: questi erano detti numeri triangolari, e potevano essere ottenuti come segue:



E così via. Si nota che, aggiungendo via via il numero naturale consecutivo, si ottiene sempre un nuovo numero triangolare.

Analogamente, sommando via via i successivi numeri dispari si ottengono dei numeri che possono essere rappresentati come quadrati. Appunto dalla figura geometrica che essi generano, tali numeri sono chiamati ancora oggi *numeri quadrati*.



E così via. I punti che formano il successivo numero dispari possono essere aggiunti “attorno” al precedente quadrato, formando uno *gnomone*: in seguito all'aggiunta del dispari successivo si ottiene così sempre da capo un nuovo quadrato.

È possibile costruire con i numeri tutti i tipi di poligoni: esistono numeri pentagonali, esagonali, ecc... Un numero ottenuto dal prodotto di due fattori è un *numero piano*, rappresentabile come un rettangolo, mentre un numero ottenuto dal prodotto di tre fattori può essere rappresentato anche come un parallelepipedo, pertanto prende il nome di *numero solido*.

Tale modo di figurarsi i numeri si consoliderà nel tempo. Lo ritroviamo in Euclide, che ci fornisce le definizioni di numero piano, solido, quadrato e cubo<sup>10</sup>, ed anche in Aristotele:

Così si dice che i numeri hanno determinate qualità: per esempio, i numeri composti e che non ridanno una sola dimensione, e dei quali sono copia la superficie e il solido: tali sono quei numeri prodotti dalla moltiplicazione di due fattori e dalla moltiplicazione di tre fattori<sup>11</sup>.

### ***I λόγοι nascosti nelle figure.***

In parallelo alla ricerca che mira a visualizzare i numeri in forma geometrica, i Pitagorici portarono avanti quella volta a rinvenire i rapporti numerici insiti nelle figure, e quindi a ricondurre anche la dimensione geometrica a quella aritmetica.

Innanzitutto, occorre spiegare cosa si intende per rapporto geometrico (λόγος). Questo concetto si fonda su quello di *misura*. Data una grandezza, *misurarla* significa confrontarla con un'altra grandezza (*l'unità di misura*) ad essa omogenea, opportunamente scelta in modo tale da essere contenuta un numero intero di volte nella grandezza di partenza. Tale numero è la misura della prima grandezza. Si intuisce pertanto che la misura è sempre intrinsecamente *relativa* all'unità di misura scelta, mentre la grandezza è *assoluta*.

Date due grandezze, nel mondo pitagorico il loro λόγος era definito come il rapporto tra le loro due misure rispetto ad una stessa unità. Ad esempio, dato un triangolo rettangolo avente i cateti di 9 cm e 12 cm, il più lungo segmento contenuto in entrambi è quello di 3 cm, e pertanto nel nostro caso esso è la più opportuna unità di misura. Questo segmento è contenuto esattamente 3 volte nel cateto minore e 4 volte nel cateto maggiore. Il λόγος tra i

10 EUCLIDE, *Elementi*, VII deff. 16-19. L'edizione di riferimento è quella a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, Torino 1970. Di queste definizioni tratterò più diffusamente nel corso del settimo capitolo.

11 ARISTOTELE, *Metafisica*, Δ 14, 1020 b 2-6.

due cateti è quindi  $\frac{3}{4}$ . (Si faccia attenzione al fatto che  $\frac{3}{4}$  non è un numero, ma una coppia ordinata di numeri.)

Dal concetto di λόγος dipende quello di proporzione, definita, nel sistema matematico pitagorico, come uguaglianza di due rapporti. Due triangoli rettangoli aventi i cateti di 6 cm e 8 cm il primo, di 9 cm e 12 cm il secondo, sono detti avere i cateti in proporzione, poiché in entrambi i casi questi hanno come λόγος  $\frac{3}{4}$ .

I Pitagorici furono attenti ricercatori di λόγοι. Trovarono, ad esempio, che questi stavano alla base dell'armonia musicale. Esistono varie testimonianze relative ai primi studi sull'acustica: alcune ne attribuiscono la paternità allo stesso Pitagora, altre a matematici della scuola. Ne riporto una:

Ippaso [...] costruì quattro dischi di bronzo, tali che i loro diametri erano uguali, ma lo spessore del primo disco era una volta e un terzo quello del secondo, una volta e mezzo quello del terzo e due volte quello del quarto; sicché, percossi, producevano una specie di accordo musicale<sup>12</sup>.

Eseguendo i calcoli, si trova che i dischi hanno i seguenti spessori:

$$2 = 1 + \frac{1}{1} ; \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} ; \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} ; 1$$

I suoni prodotti dai dischi, se percossi assieme, sono particolarmente armoniosi, e possono essere riottenuti anche percuotendo corde o vasi parzialmente pieni d'acqua: ciò che dev'essere tenuto costante è proprio il λόγος tra le misure dei due corpi che vibrano

assieme. In particolare,  $\frac{2}{1}$  produce un accordo di ottava,  $\frac{3}{2}$  un accordo di quinta e

$\frac{4}{3}$  un accordo di quarta. Si tratta di osservazioni che non potevano che confermare l'idea di un universo ordinato secondo leggi matematiche, in cui tutto è numero e tutto è λόγος.

12 D-K, Ippaso di Metaponto, 18 A 12.

### ***Il teorema di Pitagora e le terne pitagoriche.***

Vorrei esaminare ora un caso molto significativo di questa corrispondenza tra numeri e figure: il teorema di Pitagora. Mi sta particolarmente a cuore approfondire tale questione, oltre che per la limpidezza con cui emerge l'origine logica del legame aritmetica-geometria, anche per le problematiche che si svilupperanno a partire da alcune applicazioni di tale teorema, problematiche fondamentali per i temi trattati in questo lavoro di tesi.

Sicuramente era stato osservato ampiamente già nel mondo pre-greco che, presi tre segmenti lunghi rispettivamente 3, 4 e 5 unità (indipendentemente dall'unità di misura scelta), tali segmenti potevano essere usati per formare un triangolo rettangolo. Non solo, ai babilonesi era con ogni probabilità noto lo stesso teorema di Pitagora, ossia il fatto che la somma dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa. Da qui, si poté facilmente dedurre che tutte le terne di numeri ( $a$ ;  $b$ ;  $c$ ) che soddisfacevano la relazione  $a^2 + b^2 = c^2$  potevano essere usate per costruire un triangolo rettangolo<sup>13</sup>. Si tratta di una scoperta molto antica, che non poteva non suggerire alla curiosa mente dell'uomo greco l'idea che un preciso rapporto numerico avesse sempre uno ed un solo corrispettivo geometrico, e quindi che tra i numeri e le figure esistesse un legame profondo ed essenziale.

Già in epoca babilonese si iniziò a ricercare in modo sistematico terne “pitagoriche” (ossia soddisfacenti la relazione  $a^2 + b^2 = c^2$ ). Alla collezione Plimpton della Columbia University di New York è conservata una tavoletta d'argilla del periodo paleobabilonese sulla quale, in tre colonne, sono riportati dei valori che costituiscono una serie di terne “pitagoriche”<sup>14</sup>. Esiste una formula per il calcolo di queste terne, sicuramente nota già agli albori della filosofia greca e con ogni probabilità posseduta anche dai babilonesi<sup>15</sup>: presi due numeri naturali  $p$  e  $q$  primi tra loro, e non entrambi dispari, si può costruire una terna pitagorica come segue.

13 Cfr. O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano 1974 (orig. OTTO NEUGEBAUER, *The exact sciences in Antiquity*, Princeton University Press, Princeton 1952), p. 54.

14 Cfr. *ivi*, pp. 54-56.

15 Cfr. O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., pp. 57-58; K. VON FRITZ, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, in *Annals of Mathematics*, 46, 1945, p. 251; M. LIVIO, *La sezione aurea*, Rizzoli, Milano 2007, p. 48.

$$a = 2pq$$

$$b = p^2 - q^2$$

$$c = p^2 + q^2$$

È infatti evidente che:

$$a^2 + b^2 = (2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = 4p^2q^2 + p^4 + q^4 - 2p^2q^2 = p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = (p^2 + q^2)^2 = c^2$$

È importante fin d'ora notare, ai fini di quanto si vedrà nel seguito di questo lavoro, che da questa formula si ricavano solo valori numerici interi.

Dunque, il teorema di Pitagora era noto già molto tempo prima dell'esistenza del filosofo da cui prende il nome. Nel corso della storia della matematica ne sono state elaborate svariate dimostrazioni. In appendice ho scelto di riportarne due, ritenute particolarmente significative: la prima è stata scelta per la sua semplicità, la seconda invece è quella proposta da Euclide nei suoi *Elementi*. Si noti che essa, essendo contenuta nel Libro primo, ha il vantaggio di non presupporre la nozione di proporzionalità, che verrà introdotta solo nel Libro quinto.



## CAPITOLO 2. LA SCOPERTA DELL'INCOMMENSURABILITÀ

### 1. Casi notevoli di incommensurabilità.

La scoperta dell'incommensurabilità è tradizionalmente legata al nome di Ippaso da Metaponto, sebbene gli antichi talvolta la attribuiscono allo stesso Pitagora (attribuzione tuttavia infondata, e dovuta principalmente alla venerazione per il fondatore della scuola). Pensare che tale scoperta sia potuta avvenire da un giorno all'altro per opera di una singola persona è assolutamente riduttivo, e certamente non rispondente al vero. È ampiamente documentato come, già in epoca pre-greca, i matematici si fossero scontrati con alcuni problemi (come, ad esempio, la determinazione della misura della diagonale del quadrato) che saranno determinanti nella successiva elaborazione del problema dell'incommensurabilità<sup>16</sup>. Tuttavia, è in seno al mondo greco che si è avuta la chiara presa di coscienza del problema su un piano teorico oltre che pratico, la sistematizzazione della scoperta stessa e l'elaborazione di tutte le conseguenze che la scoperta porta con sé.

Come si sia potuta avere questa presa di coscienza e quali siano state le successive fasi di elaborazione del problema può essere da noi ricostruito solo per via ipotetica. Non è mia intenzione addentrarmi nel dibattito relativo alla questione, non è senz'altro questa la sede adatta<sup>17</sup>. Maurice Caveing ha proposto una ricostruzione di questa scoperta a mio avviso attendibile, o perlomeno sufficiente ai miei scopi<sup>18</sup>: mi atterrò a questa ricostruzione nella mia trattazione, facendo nuovamente presente che non ho alcuna pretesa di tracciare con precisione le linee di sviluppo di questa scoperta, quanto piuttosto di presentare alcuni dei problemi con cui senz'altro la matematica antica si era dovuta scontrare e che avevano portato alla scoperta in questione.

16 I matematici babilonesi, ad esempio, affrontarono problemi di secondo grado che necessitavano, per essere risolti, delle radici quadrate. Essi inoltre ci hanno lasciato diverse tavolette che testimoniano la ricerca del rapporto tra diagonale e lato del quadrato (oggi sappiamo che tale rapporto corrisponde a  $\sqrt{2}$ ). Per ulteriori approfondimenti sulla conoscenza dei valori irrazionali nella matematica babilonese si rinvia all'opera più autorevole in materia: O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit.

17 Per una ricostruzione del dibattito relativo alla scoperta dell'incommensurabilità si rinvia a M. CAVEING, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide. La constitution du type mathématique de l'idealité dans la pensée grecque*, Presses universitaires du septentrion, Paris 1998, pp.16-19.

18 Cfr. M. CAVEING, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, cit., pp. 183-184.

### *Il pentagono regolare.*

Come ho spiegato nel capitolo precedente, i Pitagorici studiarono i rapporti numerici contenuti nelle figure, dal momento che questi avrebbero rivelato il λόγος (nel senso più ampio) della figura stessa: si trattava di una ricerca volta a rinvenire l'intima e profonda struttura della realtà.

È abbastanza verosimile che i Pitagorici si siano occupati presto del pentagono regolare, in quanto questa figura è necessaria alla costruzione di uno dei cinque poliedri regolari: il dodecaedro. La “sfera di dodici pentagoni” era un solido senz'altro noto ai Pitagorici: esso era presente in Italia meridionale sotto forma di cristalli di pirite, inoltre un dodecaedro in pietra è stato rinvenuto nel nord Italia ed altri in bronzo erano presenti in Gallia<sup>19</sup>. Ora, una delle figure su cui è più facile osservare l'incommensurabilità è proprio il pentagono regolare.

Per determinare il λόγος tra due segmenti vi era una tecnica, nota con il nome di ἀνθυφαίρεσις (sebbene Aristotele si riferisca ad essa come ἀνταναιρέσις). Si tratta di un metodo che permette di trovare il massimo comun divisore tra due segmenti, vale a dire il più lungo segmento contenuto un numero intero di volte in entrambi. Se tale segmento è contenuto, ad esempio, 5 volte nel primo e 8 nel secondo, il λόγος tra i due segmenti sarà

$$\frac{5}{8} .$$

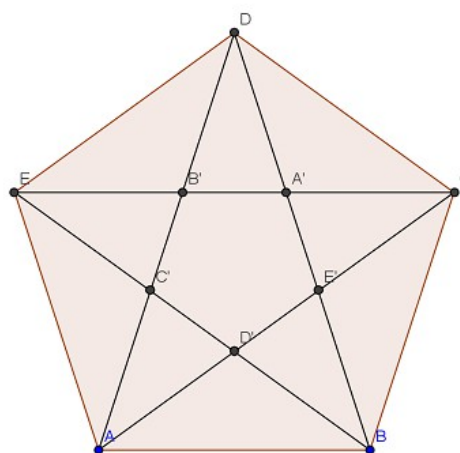
L'ἀνθυφαίρεσις consiste in una serie di sottrazioni successive. Dal segmento maggiore  $a$  si sottrae il segmento minore  $b$  tante volte quante è possibile. Se esso non è contenuto un numero intero di volte, si otterrà un primo resto  $r_1$ . Si passa a sottrarre  $r_1$  al segmento minore  $b$ , ottenendo un secondo resto,  $r_2$ . Si prosegue sottraendo  $r_2$  da  $r_1$  ottenendo  $r_3$ , e così via, finché si ottiene un resto contenuto un numero intero di volte nel resto precedente. Tale segmento misura tanto  $a$  quanto  $b$ , pertanto è il divisore comune cercato.

19 Cfr. W. BURKERT, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, Harvard University press, Cambridge Mass. 1972 (orig. W. BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Verlag Hans Carl, Nürnberg 1962), p. 460, K. VON FRITZ, *the discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, cit., p. 256.

Questo procedimento è descritto accuratamente da Euclide nei suoi *Elementi*<sup>20</sup>, ed anche Aristotele vi si riferisce, sostenendo che c'è proporzionalità quando l'ἀνθυφαίρεσις tra due grandezze avviene in modo identico:

Il numero di parti che viene sottratto alla superficie dal taglio della parallela è uguale al numero di parti che viene sottratto dai lati: orbene, questa è appunto la definizione di proporzionalità<sup>21</sup>.

Il metodo delle sottrazioni successive può essere applicato appunto al pentagono regolare per trovare la misura comune della diagonale e del lato. Costruita la figura e tracciate le diagonali, si constata subito che queste, intersecandosi, formano al centro un pentagono simile a quello di partenza. Si procede a sottrarre il lato  $l_1 = AE$  alla diagonale  $d_1 = AD$ : si può facilmente dimostrare che il resto di questa prima sottrazione è un segmento congruente alla diagonale del pentagono interno  $d_2 = B'D'$ . Si prosegue sottraendo  $d_2$  a  $l_1$ , e si ritrova come resto un segmento congruente al lato del pentagono interno  $l_2 = B'C'$ . Si tratta a questo punto di sottrarre  $l_2$  a  $d_2$ : è del tutto evidente che siamo ritornati esattamente alla situazione di partenza, e che, per quanto si prosegue nel processo di reciproca sottrazione, si ricade sempre nello stesso caso, ottenendo resti sempre minori e tuttavia mai nulli, secondo un processo senza fine. (Per la dimostrazione completa si rinvia all'appendice).



Si tratta di una dimostrazione che per essere condotta richiede solamente due teoremi: quello per cui la somma degli angoli interni di un poligono di  $n$  lati è uguale a  $n - 2$  angoli piatti, e quello per cui gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti (e viceversa). Si tratta di due teoremi molto elementari, quasi sicuramente già conosciuti e padroneggiati alla metà del V secolo, quando questa dimostrazione venne presumibilmente condotta per la prima volta<sup>22</sup>.

20 EUCLIDE, *Elementi*, VII, 1-2; X, 1-3.

21 ARISTOTELE, *Topici*, Θ 3, 158 b 29-35.

22 Cfr. K. VON FRITZ, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, cit. p. 259.

Questa progressione senza fine dell'ἀνομοιομετρίας mostrava inequivocabilmente che un segmento contenuto in entrambe le lunghezze *non esisteva*. Si rivelava l'impossibilità di principio di misurare insieme i due segmenti, e dunque di determinarne il λόγος: nell'universo razionale della matematica pitagorica iniziavano a farsi strada le grandezze *irrazionali*<sup>23</sup>.

Non sappiamo se la dimostrazione così come è stata qui proposta fu effettivamente condotta, né se la sua paternità sia attribuibile a Ippaso da Metaponto. Non ci è dato nemmeno di sapere se fu questo il primo caso di incommensurabilità ad essere effettivamente constatato, tuttavia, per la sua immediatezza e semplicità, molti studiosi concordano nell'attribuirgli un ruolo chiave nella presa di coscienza che esistono grandezze prive di λόγος.

Senz'altro, si deve ammettere che i cosiddetti Pitagorici avevano un'alta considerazione del pentagono, figura quasi sacra, tanto che il pentagramma (ossia il “pentagono stellato”) divenne il simbolo della scuola, cucito sugli abiti dei suoi membri. Platone, che attribuiva agli altri quattro poliedri regolari un ruolo nella costituzione fisica dell'universo, faceva corrispondere alla sfera di dodici pentagoni l'universo stesso<sup>24</sup>.

### ***La sezione aurea.***

Non è senz'altro questo l'unico caso di incommensurabilità noto ai Greci. Strettamente legato al caso del pentagono regolare è quello della cosiddetta “sezione aurea” (o, secondo la terminologia greca, la divisione di un segmento in media ed estrema ragione).

Dividere un segmento in media ed estrema ragione significa dividerlo in due parti diseguali, tali che la maggiore abbia con la minore lo stesso λόγος che l'intero segmento ha con la parte maggiore. Si tratta dunque di formare una proporzione: se l'intero segmento

23 Una grandezza irrazionale è una grandezza che non può essere espressa come rapporto di numeri interi. I Greci utilizzarono due diverse parole per indicare queste quantità: ἄλογος che significa “che non ha rapporto” ed indica la radice di un quadrato non perfetto, e ἄρρητος che significa “inesprimibile”, ed indica l'irrazionale in generale, dunque anche quantità del tipo  $\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$ .

Questo valore è estremamente significativo, se ne parlerà abbondantemente nel prossimo paragrafo.  
24 PLATONE, *Timeo*, 55 c.

misura 1, detta  $x$  la prima parte, la seconda avrà valore  $1 - x$ , e i tre segmenti saranno tali che:

$$1 : x = x : (1 - x) .$$

Questa equazione, elaborata, diventa:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Ci è possibile risolvere l'equazione applicando la formula a noi nota: ne ricaviamo che essa ha una sola soluzione positiva, e che tale soluzione è  $\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$ . Balza immediatamente all'occhio la presenza nel risultato di una radice quadrata. Si tratta quindi di un valore *irrazionale*, dunque impossibile da ricondurre ad un  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  pitagorico. Non sappiamo con certezza se i matematici greci, che non possedevano la nostra formula, furono fin da subito in grado di constatare l'irrazionalità di tale valore<sup>25</sup>. Senz'altro, tuttavia, essi avevano molta dimestichezza con tale sezione, e lo stesso Euclide si occupa della divisione di un segmento in media ed estrema ragione, fornendoci ben due procedimenti, dei quali il primo è riportato in appendice<sup>26</sup>.

La familiarità con la sezione aurea era dovuta al fatto che questa proporzione, per la sua caratteristica di essere immediatamente percepita dall'occhio umano come estremamente armoniosa, rivestiva un ruolo fondamentale nell'estetica greca. Essa inoltre può essere rinvenuta in svariati elementi naturali, ad esempio in certe conchiglie, ed in una figura geometrica a noi ormai nota: il pentagono regolare. Il misterioso  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  (che sembra non essere un  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ ) tra diagonale e lato è infatti proprio il rapporto aureo. (Si riporta in

25 Cfr. C. B. BOYER, *Storia della matematica*, ISEDI Istituto Editoriale Internazionale, Milano 1976 (orig. C. B. BOYER, *A history of mathematics*, Wiley 1968), p. 60.

26 Il procedimento per la divisione del segmento in media ed estrema ragione che riporto in appendice è descritto nella proposizione II, 11, all'interno del Libro della cosiddetta "algebra geometrica", dove il problema è posto come quello di "dividere una retta in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle sue parti sia uguale al quadrato della parte rimanente". Dunque, una delle due parti dev'essere media proporzionale tra la restante parte e l'intero segmento, ed è quindi evidente che si sta dividendo il segmento secondo la sezione aurea. Troviamo l'indicazione di un secondo metodo per eseguire tale divisione nella proposizione VI, 30, in cui il problema è esplicitamente posto come quello di "dividere in estrema e media ragione una retta terminata data".

appendice una dimostrazione relativa alla presenza della sezione aurea nel pentagono regolare)

È interessante notare inoltre che la sezione aurea riproduce infinitamente se stessa: se si riporta un segmento uguale al segmento minore sulla parte maggiore, quest'ultima risulta evidentemente divisa di nuovo in media ed estrema ragione. Questo procedimento, a ben vedere, altro non è che la già nota ἀνθυφαίρεσις, ed anche questa volta, come nel caso del pentagono, sottraendo via via il segmento minore al maggiore si trovano sempre da capo segmenti in proporzione aurea, e ci si ritrova quindi sempre al punto di partenza. Tale osservazione da sola è sufficiente a provare in modo inconfutabile l'incommensurabilità dei segmenti in proporzione aurea, esattamente come erano stati mostrati incommensurabili il lato e la diagonale del pentagono.

### ***Diagonale e lato del quadrato.***

Il caso di incommensurabilità forse a noi più noto è quello della diagonale e del lato del quadrato. Con ogni probabilità, ci si occupò molto presto di studiare anche i λόγοι che si nascono nel quadrato, conducendo studi che, portati avanti grossomodo in parallelo a quelli sul pentagono, portavano ad una stessa conclusione.

Probabilmente, già molto precocemente si dovette iniziare a sospettare l'impossibilità di esprimere  $\frac{\text{lato}}{\text{diagonale}}$  come rapporto di due numeri interi. Sappiamo che già i babilonesi si erano scontrati con la difficoltà di misurare assieme questi due segmenti. È arrivata fino a noi una tavoletta di argilla, oggi conservata presso l'Università di Yale, che ci testimonia le ricerche effettuate in tal senso. Vi troviamo rappresentato un quadrato: sul lato sta scritto il numero 30, sulla diagonale i numeri 1,24,51,10 e 42,25,35, che corrispondono a 1,414213... e a 42,426388... . È evidente che moltiplicando 30 per 1,414213... si ottiene proprio 42,426388... . I due numeri quindi esprimono rispettivamente  $\sqrt{2}$  (con un errore di circa 0,000001) e la misura della diagonale del quadrato di lato 30: se i



abilonesi non si scontrarono con l'impossibilità di determinare il λόγος di lato e diagonale, senz'altro essi si resero conto che il compito presentava delle difficoltà, e furono in grado di calcolare questo valore con un'approssimazione decisamente soddisfacente<sup>27</sup>.

Tuttavia, è solo in seno al mondo greco che viene elaborata una dimostrazione dell'*impossibilità* di principio di esprimere  $\frac{\text{lato}}{\text{diagonale}}$ .

La diagonale divide il quadrato in due triangoli rettangoli isosceli, cui può essere applicato il teorema di Pitagora. I quadrati costruiti sui cateti misurano  $l^2$ , e il quadrato costruito sull'ipotenusa  $d^2$ . Il problema si riduce quindi a cercare due numeri  $l$  e  $d$  tali che  $2 \cdot l^2 = d^2$ . L'impossibilità di trovare due numeri che soddisfino a questa condizione può essere dimostrata con una prova per assurdo puramente aritmetica. Tale prova si basa sulla proprietà dei numeri di essere sempre o pari o dispari, e ci è tramandata da Aristotele<sup>28</sup>: la riporto in appendice. Sostiene Bruno Centrone che anche i Pitagorici avessero una prova dell'irrazionalità basata sulla teoria del pari e del dispari, ma non sembra probabile che sia la stessa proposta da Aristotele<sup>29</sup>.

Esiste anche una prova squisitamente geometrica dell'incommensurabilità lato-diagonale, basata, come nel caso del pentagono, sull'*ἀνθυφαίρεσις* (anche questa prova è riportata in appendice). Nel caso del quadrato, tuttavia, la prova è decisamente meno immediata, in quanto richiede una serie di costruzioni aggiuntive. Se tale prova fu effettivamente elaborata, ci doveva già essere perlomeno il forte sospetto che esistessero grandezze incommensurabili: non si giustificerebbe altrimenti lo sforzo di costruire una serie di figure aggiuntive, chiaramente mirato a confermare in modo rigoroso una conclusione a cui si era già in qualche modo pervenuti. Pertanto, verosimilmente, le osservazioni sul quadrato sono cronologicamente successive a quelle sul pentagono, e le presuppongono.

27 Cfr. O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., pp. 52-53.

28 ARISTOTELE, *Analitici Primi*, 41 a 24-50 a 37.

29 Cfr. B. CENTRONE, *Introduzione ai Pitagorici*, Laterza, Roma 1996, p. 136.

## 2. Matematiche pre-elleniche ed elleniche a confronto.

La scoperta dell'incommensurabilità è generalmente fatta risalire circa alla metà del V secolo a. C., ed è considerata in tutto e per tutto figlia del pensiero greco. Tuttavia, è stato ampiamente documentato come tale scoperta abbia degli importanti antecedenti nel mondo pre-ellenico.

Nella civiltà egiziana, e ancor più in quella babilonese, le scienze esatte avevano conosciuto un fiorente sviluppo, e avevano sotto molti aspetti raggiunto livelli analoghi a quelli raggiunti nella civiltà greca. Sono numerose le testimonianze che ci raccontano la nascita della matematica presso questi popoli. Proclo sostiene che lo studio delle quantità numeriche si sia sviluppato presso i Fenici, che necessitavano di tecniche di calcolo per gestire i propri traffici; la geometria, invece, avrebbe avuto origine in Egitto, dove le frequenti piene del Nilo costringevano periodicamente a ridividere i terreni, operazione che richiedeva appunto una scienza che si occupasse di linee e superfici<sup>30</sup>. Anche Aristotele attribuisce alla civiltà egiziana il merito di aver sviluppato le prime conoscenze geometriche, tuttavia dà di questo fatto una diversa spiegazione:

Quando [...] si passò alla scoperta di quelle scienze che non sono dirette né al piacere né alle necessità della vita, [...] ciò avvenne dapprima in quei luoghi in cui gli uomini dapprima furono liberi da occupazioni pratiche. Per questo le arti matematiche si costituirono per la prima volta in Egitto: infatti, là era concessa questa libertà alla casta dei sacerdoti<sup>31</sup>.

Ciò che emerge da queste testimonianze, in particolare da quella di Proclo, è che le scienze esatte, com'è d'altra parte naturale che sia, nacquero inizialmente con finalità pratiche. Sostenere, come spesso è stato fatto, che presso le civiltà pre-elleniche non si sia mai sviluppato un interesse fine a sé stesso per la matematica non è possibile. Un indizio di tale tipo di interesse è la presenza, nelle tavolette babilonesi, di numerosi problemi in cui si richiede di sommare, ad esempio, linee con superfici: è evidente che la risoluzione di un problema del genere non può avere alcun tipo di utilità<sup>32</sup>. Tuttavia, è innegabile anche che

30 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, parr. 64-65.

31 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 1, 981 b 20-25.

32 Cfr. C. B. BOYER, *Storia della matematica*, cit., p. 40; O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., p. 61.



tali scienze rimasero, nel mondo pre-greco, sempre legate alla loro origine pratica. L'approccio alla questione delle grandezze incommensurabili è un chiaro esempio di ciò.

Come si è visto, i babilonesi si occuparono di trovare il rapporto tra lato e diagonale del quadrato; in una tavoletta è riportato il valore 1,24,51,10, ossia, con la nostra notazione, 1,414213...: si tratta di un'ottima approssimazione, migliore di quelle che gli stessi Greci riuscivano a produrre. Approssimazioni soddisfacenti di  $\sqrt{2}$  si riscontrano anche presso la civiltà indiana<sup>33</sup>. Anche il rapporto tra circonferenza e diametro (ossia il valore che noi oggi sappiamo essere irrazionale e chiamiamo  $\pi$ ) era stato studiato prima dell'avvento della civiltà greca. Gli Egizi, ad esempio, utilizzavano il valore approssimato  $3 + \frac{13}{81}$ , decisamente prossimo al valore effettivo<sup>34</sup>.

Non sappiamo se i matematici che calcolarono questi valori fossero o meno consapevoli del fatto che si trattava di valori approssimati, nulla ci permette di escluderlo. Ciò su cui tuttavia essi non si interrogarono fu la natura delle difficoltà in cui ci si imbatteva nel ricercare questi rapporti: si trattava di un'*incapacità* o di un'effettiva *impossibilità* di determinare il valore esatto? Tale questione non si pose mai, essa era oziosa, dal momento che le approssimazioni trovate erano sufficienti a far fronte a qualsiasi esigenza di tipo pratico. Proprio in tale atteggiamento si può vedere il legame che ancora univa le scienze esatte con la loro origine empirica.

Se è doveroso ammettere che la scoperta dell'incommensurabilità parte necessariamente da osservazioni di tipo empirico, occorre tuttavia riconoscere che fu solo in seno al mondo greco che ci si interrogò sulla natura delle difficoltà incontrate, e che si dimostrò rigorosamente l'impossibilità di principio di esprimere certi rapporti tra grandezze come λόγοι pitagorici. Pertanto, è corretto attribuire solo alla civiltà ellenica il merito di aver effettivamente *scoperto* l'incommensurabilità<sup>35</sup>.

Ci sono varie spiegazioni del perché nel mondo pre-ellenico non si sia mai arrivati alla consapevolezza maturata dai Greci. Senz'altro, per i matematici babilonesi la notazione su base sessagesimale costituiva un limite notevole, dal momento che essa rendeva

33 Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Sur les définitions d'Euclide*, in *Scientia. Rivista internazionale di sintesi scientifica*, 24, 1918, p. 260.

34 Cfr. C. B. BOYER, *Storia della matematica*, cit., p. 21.

35 Cfr. M. CAVEING, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, cit., p. 18.

estremamente difficile distinguere tra numeri decimali periodici e non periodici, e che di fatto non vi era alcuna distinzione tra i due tipi di numeri<sup>36</sup>. I Greci, che facevano invece uso della notazione frazionaria, erano senz'altro agevolati da questo punto di vista.

Tuttavia, ciò che veramente cambia nel mondo greco è l'atteggiamento stesso nei confronti della matematica, la quale perde qualsiasi connotazione pratica, per diventare una scienza puramente teoretica. Solo allora si inizia ad elaborare dimostrazioni stringenti e ad occuparsi di problemi universali. La matematica

Muta la sua posizione: il mezzo diventa tutto d'un tratto il fine, lo strumento di second'ordine diventa oggetto. [...] Questo fine non consiste nel risolvere i problemi della vita pratica con l'ausilio dei numeri, ma sta nei numeri stessi, nelle figure stesse, nella conoscenza pura delle loro proprietà e delle verità eterne, che le leggi del loro, proprio, mondo rappresentano<sup>37</sup>.

### 3. La riformulazione del concetto di λόγος.

#### *La matematica pitagorica: un sistema assiomatico.*

Si definisce *assioma* un “principio evidente per sé, e che perciò non ha bisogno di essere dimostrato”<sup>38</sup>. L'aritmetica e la geometria si fondano sempre inevitabilmente su assiomi, la presa di coscienza dei quali è uno dei compiti di queste stesse discipline. Possiamo dire che anche i Pitagorici, a loro modo, possedevano quello che noi oggi definiremmo un *sistema assiomatico*, sebbene indubbiamente essi non potessero averne coscienza. Scrive Imre Toth:

Spesso, veri e propri assiomi venivano considerati semplicemente come definizioni o anche come *archai* in un senso impreciso, prevalentemente metafisico, dunque più che altro come filosofemi: ne è esempio la proposizione relativa all'*indivisibilità della monade*<sup>39</sup>.

36 Cfr. *ivi*, p. 24.

37 I. TOTH, prefazione a E. CATTANELI, *Enti matematici e metafisica. Platone, l'Accademia e Aristotele a confronto*, Vita e pensiero, Milano 1996, p. IX.

38 G. DEVOTO, G. C. OLI, *Dizionario della lingua italiana*, Firenze, Le Monnier, 1971.

39 I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Progromeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel Corpus Aristotelicum nel loro contesto matematico e filosofico*, Vita e pensiero, Milano 1997, p. 72.

L'estensione anche fisica del punto, la riducibilità della realtà geometrica a λόγος, la definizione di quest'ultimo come rapporto di due numeri interi sono solo alcuni degli altri possibili esempi di assiomi, inconsapevolmente presenti nella matematica pitagorica<sup>40</sup>.

La scoperta dell'incommensurabilità, tuttavia, portò con sé tutta una serie di conseguenze, alcune delle quali andavano a cozzare con il sistema assiomatico della matematica pitagorica. Alcune nozioni, percepite come immediatamente evidenti, ad un esame attento si rivelavano inadeguate a rendere conto della recente scoperta: si poneva quindi in problema di riformulare le fondamenta stesse dell'edificio matematico.

### ***Eudosso.***

Uno degli assiomi che veniva posto in crisi dall'esistenza di grandezze incommensurabili era quello per cui λόγος era il rapporto di due interi, una coppia ordinata  $(m, n)$  dove  $m$  ed  $n$  sono numeri naturali. Era infatti stato mostrato che esistevano innumerevoli casi di coppie di grandezze che non ammettevano unità di misura comune, e che pertanto dovevano essere riconosciute, a rigore, come prive di λόγος. A tali coppie di grandezze non era chiaramente applicabile nemmeno la nozione di proporzionalità, il che cozzava con il senso comune: dati due quadrati  $Q_1$  e  $Q_2$ , ad esempio, risulta evidente che sussiste la proporzione  $l_1 : d_1 = l_2 : d_2$ , il che però non trovava supporto nella teoria: dal momento che  $(l_1; d_1)$  e  $(l_2; d_2)$  non erano λόγοι, l'uguaglianza  $l_1 : d_1 = l_2 : d_2$  era semplicemente priva di significato. Per dirla con Toth:

Anche il nome, o il segno  $[2^*, 1]$ , non è una parola del linguaggio dei *logoi*, ma vi è inespriabile, non è affatto un linguaggio, non un *logos* ma un *alolon*, un mero incomprensibile rumore, un segno grafico che non indica nulla<sup>41</sup>.

- 40 Un altro assioma fondamentale della matematica greca è quello per cui due rette parallele non si incontrano mai, assioma formulato da Euclide come postulato, e ancor oggi presupposto dalla geometria comunemente utilizzata (detta appunto geometria euclidea). I Greci si resero conto dell'indimostrabilità del postulato, ed ebbero forse addirittura coscienza dell'esistenza di possibili geometrie non euclidee. A tale proposito, si rinvia all'autorevole opera: I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit.).
- 41 IMRE TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit. p. 232. Toth utilizza il simbolo  $2^*$  per indicare quel valore che elevato al quadrato dà 2, ossia, nel linguaggio della matematica contemporanea,  $\sqrt{2}$ .

Si rendeva dunque necessario un ripensamento delle nozioni di λόγος e di proporzionalità, le quali dovevano rendere conto dell'esistenza di grandezze irrazionali. A questo compito provvide un brillante matematico contemporaneo di Platone: Eudosso di Cnido, il quale introdusse le nuove definizioni di rapporto e di proporzionalità, destinate a divenire definizioni "ufficiali", riproposte da Euclide nel quinto Libro dei suoi *Elementi*:

Si dice che hanno rapporto (o *ragione*) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente<sup>42</sup>.

Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto ad una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo<sup>43</sup>.

Innanzitutto, veniva fornita una nuova definizione di λόγος, basata sulla nozione di *grandezza*. Si noti che tale mossa è indispensabile nel momento in cui ci si vuole svincolare dalla definizione di rapporto come coppia ordinata di numeri interi. La grandezza, infatti, come si era già precedentemente osservato, è una proprietà *assoluta* dell'oggetto, mentre la misura è per definizione *relativa* all'unità scelta. Nel momento in cui si parla di grandezze, quindi, non è più necessario passare per il tramite di un segmento contenuto nei segmenti un numero intero di volte.

Per la definizione, così com'è proposta da Euclide, due grandezze hanno sempre λόγος purché esse siano *omogenee*, ossia purché possano superarsi reciprocamente<sup>44</sup>. Noi sappiamo, ad esempio, che la diagonale del quadrato è maggiore del lato ma minore del suo doppio: moltiplicando il lato per due, quindi, otteniamo un segmento che supera la diagonale, e tanto basta per affermare che le due possiedono un λόγος. Al contrario, il lato del quadrato e la sua area non hanno λόγος, in quanto un segmento non potrà mai superare un'area, né viceversa.

42 EUCLIDE, *Elementi*, V, 4.

43 Ivi, V, 5.

44 Il cosiddetto "Postulato di Archimede", attribuibile però allo stesso Eudosso, afferma che date due grandezze omogenee diseguali è sempre possibile trovare un multiplo della minore che superi la maggiore, o, il che è lo stesso, un sottomultiplo della maggiore che sia inferiore alla grandezza minore. Cfr. A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, Studium, Roma 1951, p. 102.

La seconda definizione, quella di proporzione, appare invece più artificiosa: questo rivela la grande difficoltà di definire in modo rigoroso un concetto molto difficile da afferrare, se non in modo intuitivo.

Il significato della definizione è il seguente: date quattro grandezze  $a, b, c, d$ , esse formano una proporzione se e solo se, presi due qualsiasi numeri naturali  $m$  ed  $n$ , si ha sempre che:

se  $ma < nb$  allora anche  $mc < nd$

se  $ma = nb$  allora anche  $mc = nd$

se  $ma > nb$  allora anche  $mc > nd$

o, il che è lo stesso:

se  $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$  allora anche  $\frac{c}{d} < \frac{m}{n}$

se  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$  allora anche  $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

se  $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$  allora anche  $\frac{c}{d} > \frac{m}{n}$

Spiego la definizione con un esempio: il  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$  sussistente tra lato e diagonale del quadrato, che chiameremo, con Imre Toth,  $2^{*45}$ , non si può esprimere come  $\frac{m}{n}$ ; tuttavia,

preso un qualsiasi  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$  del tipo  $\frac{m}{n}$  si può sempre stabilire se esso è minore o maggiore di  $2^*$ . Quindi, l'insieme dei  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$  pitagorici può essere diviso in due metà, delle quali l'una comprende tutti i  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$  minori di  $2^*$ , l'altra tutti quelli maggiori.

$$\dots \frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \dots; \dots \frac{70}{99}, \frac{17}{12}, \frac{3}{2}, \dots^{46}$$

Vediamo, in particolare che la prima metà non ha estremo superiore, e che la seconda non ha estremo inferiore (infatti, preso qualsiasi valore minore di  $2^*$ , possiamo sempre

45 Sebbene la definizione di Eudosso sia potenzialmente in grado di accogliere anche quelli che noi oggi chiamiamo "numeri irrazionali", va tenuto presente che, nelle intenzioni di Eudosso, essa si riferisce solo a rapporti tra grandezze, quindi l'espressione  $2^*$  indica, nella nostra trattazione, un  $\lambda\gamma\omicron\varsigma$ , e mai un numero. Anche per questo si è preferito evitare il ricorso al simbolo  $\sqrt{2}$ . Ad ogni modo, tale questione sarà approfondita nella seconda parte del presente lavoro.

46 I valori utilizzati nella costruzione delle due sequenze non sono casuali, si tratta al contrario di approssimazioni di  $2^*$  ben note ai matematici greci. Si tratterà dell'algoritmo per il calcolo di questi valori nel corso del capitolo 5.

trovare un altro valore che stia tra esso e  $2^*$ , e dunque non esiste “il più grande λόγος minore di  $2^*$ ”, così come non esiste “il più piccolo λόγος maggiore di  $2^*$ ”.  $2^*$  è l'*elemento di separazione* dei due insiemi. In termini contemporanei, diremmo che  $2^*$  individua una *sezione*.

I due λόγοι eudossiani  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  sono uguali se e solo se essi individuano la stessa *sezione* all'interno della serie dei λόγοι pitagorici, ossia se tutti i valori arrotondati per eccesso del primo sono anche valori arrotondati per eccesso del secondo, e viceversa<sup>47</sup>.

Dietro l'artificiosità della definizione di Eudosso, dunque, si nascondono intuizioni incredibilmente acute: in essa infatti si anticipano (seppur in modo inconsapevole ed embrionale) alcuni concetti, come quello di *elemento di separazione*, oppure quello di *sezione*, che sarà proposto solo da Dedekind, e che permetterà in epoca più recente di definire anche i valori irrazionali come numeri.

Un'ulteriore osservazione merita qui di essere fatta a proposito della definizione esaminata. Come si è detto, quattro grandezze  $a, b, c, d$  costituiscono una proporzione se e

solo se *qualsiasi* λόγος pitagorico  $\frac{m}{n}$  che sia maggiore di  $\frac{a}{b}$  è anche maggiore di  $\frac{c}{d}$ : la

corrispondenza del segno di uguaglianza/disuguaglianza deve realizzarsi *per ogni* coppia  $\frac{m}{n}$ .

A rigore, quindi, per verificare una relazione di proporzionalità sarebbe necessario eseguire

la verifica con tutte le coppie  $\frac{m}{n}$  esistenti, il che significherebbe eseguire infinite verifiche,

sapendo che un solo caso nel quale non si realizza la corrispondenza inficerebbe la relazione stessa di proporzionalità. Eudosso, inconsapevolmente, ha fatto uso di quello che noi oggi chiamiamo *quantificatore universale*:  $\forall$ <sup>48</sup>. La difficoltà che questa definizione porta con sé è evidente, e fu probabilmente percepita anche dallo stesso Euclide, il quale evitò di farne uso nei primi quattro Libri, rimandando la trattazione della proporzionalità al Libro quinto: è difficile non supporre che questa scelta sia dovuta alla percezione di questa definizione come non sufficientemente rigorosa.

47 Cfr. A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, cit., p. 106.

48 Cfr. L. GEYMONAT, *Storia della matematica*, cit., pp. 339-340.

Ad ogni modo, quello che forse è il principale merito dell'opera di Eudosso è quello di aver compiuto, seppur inconsapevolmente, una revisione dei fondamenti assiomatici della matematica stessa. Egli mise in discussione un assioma fino a quel momento dato per scontato (e quindi nemmeno percepito come tale), quello per cui ogni λόγος può essere definito da una coppia ordinata  $(m; n)$ , e lo sostituì con quello per cui ogni λόγος è individuato da due serie infinite di coppie ordinate  $(m; n)$ <sup>49</sup>. Egli rese così l'edificio della matematica greca adatto ad accogliere anche le quantità irrazionali, che potevano a quel punto essere definite e trattate esattamente come le razionali.

Come il mondo dei viventi si scinde in piante e animali, così anche il mondo degli esseri geometrici si scinde in due classi: quella dei segmenti commensurabili e quella dei segmenti incommensurabili. Il commensurabile e il suo contrario, l'incommensurabile, sono entrambi Di per sé proprietà positive, entrambi possiedono il medesimo *status* ontico della realtà concreta<sup>50</sup>.

#### **4. L'infinito nel mondo greco.**

Vorrei a questo punto aprire una breve parentesi sulla percezione e sull'elaborazione concettuale dell'infinito nel mondo greco. Si tratta di una parentesi organica a questo lavoro, poiché la scoperta dell'incommensurabilità imponeva un confronto con questo concetto, da sempre problematico nel sistema di pensiero in seno al quale avvenne tale scoperta.

Infinite sono le volte in cui l'ἀνθυφαίρεσις dev'essere applicata, infinite sono le cifre decimali che occorrerebbero per indicare il λόγος  $\frac{l}{d}$ , infiniti i λόγοι pitagorici che servono a definire un λόγος eudossiano e le prove da fare per verificare una relazione di proporzionalità<sup>51</sup>.

49 Sulla valenza assiomatica dell'opera di Eudosso, Cfr. I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., in particolare pp. 232-234, 357-358.

50 I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., p. 355.

51 Nel seguito di questo lavoro ci si scontrerà nuovamente con il concetto di infinito in relazione all'incommensurabilità: Zenone utilizza il concetto di infinitamente piccolo, Aristotele pensa lo spazio come infinitamente divisibile, ma solo in potenza, Platone (assieme ad altri) si riferisce ad un algoritmo che produce infinite approssimazioni di  $2^*$ , le quali oscillano tra eccessi e difetti, mancando tuttavia sempre il centro.

I Greci, tuttavia, com'è noto, avevano molta difficoltà a gestire il concetto di infinito, che essi riferivano all'incompleto, al privo di forma, e dunque a ciò che è impossibile da cogliere determinatamente con il pensiero<sup>52</sup>. Lo stesso Parmenide, pensando al suo *essere*, gli attribuisce la finitudine, necessaria a renderlo assolutamente perfetto e intellegibile.

Per quanto riguarda i cosiddetti Pitagorici, riporto una testimonianza di Aristotele:

Anche costoro sembrano ritenere che il numero sia principio non solo come costitutivo materiale degli esseri, ma anche come costitutivo delle proprietà e degli stati medesimi. Essi pongono, poi, come elementi costitutivi del numero il pari e il dispari; di questi il primo è illimitato, il secondo limitato. L'Uno deriva da entrambi questi elementi, perché è, insieme, e pari e dispari. Dall'uno, poi, procede il numero; e i numeri, come si è detto, costituirebbero tutto quanto l'universo.

Altri Pitagorici affermano che i principi sono dieci, distinti in due serie <di contrari>:

- (1) limite – illimitato;
- (2) dispari – pari;
- (3) uno – molteplice;
- (4) destro – sinistro;
- (5) maschio – femmina;
- (6) fermo – mosso;
- (7) retto – curvo;
- (8) luce – tenebra;
- (9) buono – cattivo;
- (10) quadrato – rettangolo<sup>53</sup>.

Dunque, alcuni Pitagorici pongono un principio doppio:

pari = illimitato / dispari = limite,

altri elaborano questa coppia formando dieci coppie di contrari. Si nota subito che si formano due poli: attorno al primo sembrano condensarsi valori positivi, attorno al secondo valori negativi. Nelle prime due coppie ritroviamo la divisione dualistica proposta dal resto della scuola pitagorica, alla posizione (9) troviamo la coppia buono-cattivo: si esplicita dunque che tutti i primi membri delle coppie hanno valore positivo, i secondi negativo. È quindi chiaro che anche per i Pitagorici, come del resto per tutti i pensatori greci, l'infinito è un concetto “cattivo”.

52 Cfr. M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, Vol. 1., Einaudi, Torino 1996 (orig. M. KLINE, *Mathematical thought from Ancient to modern times*, Vol. 1, Oxford University Press, Oxford 1990), pp. 205-206.

53 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 5, 986 a 22-26.



Findlay ipotizza che, sebbene tra queste dieci coppie non vi sia posto per il dualismo commensurabile-incommensurabile, l'intera struttura bipartita non sia altro che un modo per elaborare la presenza, nell'universo matematico, delle quantità irrazionali, percepite come cattive.

È un quadro che include sistematicamente il cattivo, secondo una visione in parte basata sulla tragica scoperta che alcune grandezze non sono razionalmente correlate le une alle altre. [...] Ma il segreto condusse ad accettare un dualismo di fattori in cui l'uno fosse discontinuo, finito e buono, e l'altro per essenza continuo, incommensurabile, irrazionale e in se stesso male<sup>54</sup>.

È interessante osservare la presenza di almeno quattro coppie strettamente attinenti all'ambito matematico. In particolare, è curioso notare come al limite si associno i numeri dispari. Esistono, per questa associazione, due diverse spiegazioni. La prima ci è suggerita da Aristotele:

I Pitagorici dicono che l'infinito è il pari: infatti questo, assunto e determinato dal dispari, conferisce agli enti l'infinità; e un indizio di questo è ciò che si verifica nei numeri: ponendo, infatti, degli gnomoni attorno all'uno e separatamente, una volta si produce una figura sempre diversa, una volta sempre identica<sup>55</sup>.

Aristotele si sta riferendo alla costruzione di figure geometriche con i punti-unità di cui si è già parlato al capitolo 1. Disegnato un punto che rappresenta il numero 1, il successivo dispari, il 3, può essere rappresentato come uno gnomone, posto “attorno” all'1; il 5 come uno gnomone attorno al 3; e così via: dalla somma dei successivi dispari si generano sempre nuovi quadrati, dunque, si genera una sola figura, sempre identica. Anche i numeri pari, analogamente, possono essere rappresentati come gnomoni: si ottengono in

questo caso dei rettangoli sempre diversi: essi infatti avranno i lati con  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$   $\frac{1}{2}$  ,  $\frac{2}{3}$  ,  $\frac{3}{4}$  , ...,  $\frac{n}{n+1}$  . Si può spiegare così l'identificazione del pari con l'infinito e del dispari con il finito.

54 J. N. FINDLAY, *Platone. Le dottrine scritte e non scritte*, Vita e pensiero, Milano 1994 (orig. J. N. FINDLAY, *Plato, the Written and Unwritten Doctrines*, Humanities Press, New York 1974), p. 52.

55 ARISTOTELE, *Fisica*, III, 203 a 11-16.



Un secondo modo di spiegare l'identificazione pari-illimitato è quello di disporre i punti-unità in due file parallele: nel caso dei numeri dispari la figura risulta avere un'unità in esubero, che la chiude rendendola finita<sup>56</sup>.



## 5. Le grandezze irrazionali in alcuni passi platonici.

Particolarmente ricettivo nei confronti delle questioni fin qui sollevate fu Platone. Sappiamo che il filosofo ateniese ebbe un forte interesse per la matematica, e che la stessa Accademia fu un vivace centro di ricerche in tale ambito, cui prese parte anche il matematico Teeteto.

Sebbene a Platone non possano essere attribuite scoperte rilevanti, i suoi scritti sono disseminati di riferimenti a questioni matematiche, e talvolta le sue dottrine necessitano, per essere comprese appieno, della decifrazione dell'elemento matematico presente in esse. In particolare, nelle cosiddette “dottrine non scritte”, che secondo alcuni<sup>57</sup> sarebbero l'espressione più matura e più profonda del pensiero platonico, le idee, che nei dialoghi rivestivano il livello più alto nella gerarchia ontologica, risultano a loro volta dipendere da

56 Tale modo di raffigurarsi i numeri rende più comprensibile la protologia contenuta nelle cosiddette “dottrine non scritte” di Platone: per il filosofo ateniese infatti la Diade rappresenta l'infinito oscillare di grande e piccolo, l'indeterminato; mentre all'Uno spetta la funzione di elemento determinante. Sul ruolo dell'Uno e della Diade si avrà comunque modo di ritornare più abbondantemente nel capitolo 8.

57 Di questo avviso sono, in particolare, gli studiosi della Scuola di Tubinga.

un livello ontologico superiore, la cui natura è matematica. Il debito della filosofia nei confronti della matematica è esplicitato anche nella *Repubblica*: qui, tra le forme di conoscenza, la matematica risulta seconda solo alla dialettica, che studia le idee<sup>58</sup>.

In particolare, il filosofo si interessò fortemente al problema delle grandezze incommensurabili, l'ignoranza delle quali egli riteneva scandalosa. Nelle *Leggi* Platone scrive:

ATENIESE: «Caro Clinia, anch'io ha preso coscienza molto tardi di questa nostra condizione e il fatto mi ha veramente colpito, perché mi è sembrata una condizione non degna di uomini, ma di una qualche specie di maiali. Pertanto, ne ha provato vergogna, non tanto per me, quanto per tutto il popolo dei Greci.»

CLINIA: «A che ti riferisci .straniero? Suvvia, parla»

ATENIESE: «D'accordo, parlerò. Meglio ancora, preferisco mostrarti questa ignoranza, ricorrendo a una serie di domande. [...]»

[...]

ATENIESE: «Non sei dell'avviso che tutte queste dimensioni [lunghezza, larghezza, profondità] sono fra loro commensurabili?»

CLINIA: «Certamente»

[...]

ATENIESE: «E se invece vi fossero dei casi in cui il reciproco rapporto delle dimensioni è assolutamente impossibile, mentre, come sappiamo, noi greci siamo convinti del contrario, non sarebbe giusto che, vergognandomi a nome di tutti dicessi loro: «O voi che siete il fior fiore dei Greci, ecco qui proprio una di quelle nozioni che noi ritenevamo vergognoso ignorare.[...]?»<sup>59</sup>.

Dalla lettura dei dialoghi emerge una conoscenza chiara della questione dell'incommensurabilità: vorrei qui di seguito presentare tre passaggi particolarmente significativi in proposito.

### ***Ippia Maggiore (303 b).***

In questo dialogo Socrate si trova a ragionare attorno alla bellezza, e si chiede se due cose che assieme sono belle, siano necessariamente belle anche se prese singolarmente:

O forse niente impedisce che come di due numeri che, insieme, siano pari, l'uno sia pari e l'altro dispari o che, come di due elementi irrazionali l'insieme possa essere sia razionale che irrazionale [...]»<sup>60</sup>

58 PLATONE, *Repubblica*, Libro VI, 509 d-511 e.

59 PLATONE, *Leggi*, 819 d-820 b.

60 PLATONE, *Ippia Maggiore*, 303 b.

Che un numero pari possa risultare anche dalla somma di due dispari è cosa evidente (8 ad esempio può risultare dalla somma di 3 e 5); un po' più complesso da visualizzare è il caso in cui una grandezza razionale risulti dalla somma di due grandezze irrazionali: infatti, la somma di due radici quadrate restituisce sempre un valore irrazionale come risultato. Esiste tuttavia un caso a noi già noto (e senz'altro noto anche allo stesso Platone) in cui ciò si realizza: si tratta della divisione di un segmento in media ed estrema ragione. Partendo da un segmento razionale, infatti, la sua divisione in media ed estrema ragione genera due segmenti incommensurabili tra loro e con il segmento di partenza: la somma di questi due segmenti tuttavia restituisce la grandezza di partenza, la quale è razionale. In termini contemporanei potremmo dire:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Questo dunque è un brano particolarmente significativo perché Platone si sta con ogni probabilità riferendo proprio alla divisione di un segmento in media ed estrema ragione: si tratta, come si è visto, di un'operazione di grande rilevanza nell'ambito degli studi sull'irrazionale.

### ***Menone (82 a-85 b).***

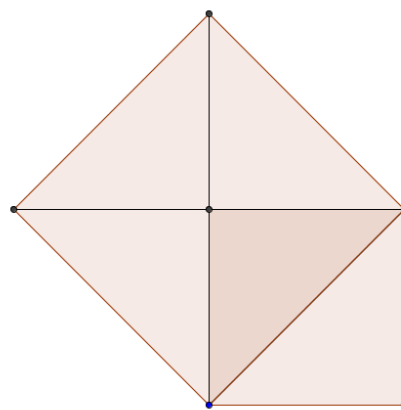
Nel dialogo *Menone* è contenuto un lunghissimo passaggio nel quale vengono sollevate alcune questioni matematiche, a questo punto a noi note. Si tratta di un brano fondamentale per quanto riguarda il problema trattato, per la modalità con cui esso è presentato, e infine per tutta una serie di questioni che, più o meno consapevolmente, emergono dal brano stesso, e a cui non viene data risposta se non in modo implicito<sup>61</sup>.

Socrate vuole dimostrare che la conoscenza altro non è che il ritorno alla memoria di nozioni già presenti in noi. Egli si rivolge così ad uno schiavo, che senz'altro non ha ricevuto alcun tipo di educazione matematica, e gli propone il seguente quesito: dato un quadrato di lato 2 piedi (e quindi di area 4 piedi quadrati), si costruisca il quadrato di area doppia (quindi, di 8 piedi quadrati): quale sarà la *misura* del suo lato? Per noi, si tratta

61 In particolare, il problema proposto da Socrate, che sembrava irrisolvibile per via aritmetica, risulta invece di facile risoluzione per via geometrica. Tale discrepanza solleva una serie di questioni, sulle quali ritorneremo abbondantemente nella seconda metà di questo lavoro.

evidentemente di moltiplicare il lato di partenza per  $\sqrt{2}$ , tuttavia la questione veniva percepita ancora come problematica ai tempi di Platone.

Dapprima il ragazzo dà la risposta per lui più evidente: se l'area è doppia anche il lato sarà doppio. Tuttavia, si mostra facilmente che la risposta è errata: un quadrato di lato 4 piedi ha un'area di 16 piedi quadrati, che è il doppio del valore cercato. Il ragazzo fa un secondo tentativo: il lato dev'essere maggiore del lato di partenza, ma minore di 4 piedi, egli propone quindi il valore intermedio di 3 piedi. Anche questa risposta, tuttavia, è chiaramente errata: un quadrato di lato tre piedi avrà un'area di 9 piedi quadrati, e dunque ancora maggiore dell'area richiesta<sup>62</sup>.



A questo punto, Socrate chiede al ragazzo, se non riesce ad esprimere la misura del lato, almeno di mostrarla nel disegno. È a questo punto che il problema trova la sua soluzione: la diagonale del quadrato di partenza è proprio il lato del quadrato doppio, e lo si può provare con un'operazione meccanica di “piastrellamento”. Il quadrato di partenza è tagliato dalla sua diagonale in due triangoli rettangoli congruenti: unendo quattro di questi triangoli si ottiene un nuovo quadrato di area evidentemente doppia rispetto a quella di partenza.

È interessante notare che, nell'intero episodio geometrico, non si trova alcuna risposta alla domanda iniziale: Socrate aveva chiesto di trovare la *misura* del lato del quadrato doppio e, come si è visto, per parlare di misura occorre vi sia un segmento contenuto un numero intero di volte sia nel lato che nella diagonale, il che chiaramente non può avvenire nel nostro caso. Sembra che qui Platone abbia voluto proprio mostrarci le difficoltà in cui si imbattevano i matematici che ricercavano il  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  tra lato e diagonale, portando il lettore di fronte all'*impasse* in cui si veniva a trovare chiunque, ignaro dell'esistenza di grandezze incommensurabili, tentasse di determinare la *misura* di questi due segmenti: ogni tentativo di imbrigliarli in un  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  falliva sistematicamente, producendo valori continuamente in eccesso o in difetto.

62 In questo secondo tentativo, il valore proposto per  $\sqrt{2}$  è  $3/2$ . Vorrei sottolineare fin d'ora che si tratta di un  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  molto significativo: è infatti il primo valore che restituiscono gli algoritmi utilizzati in epoca greca per il calcolo di valori numerici approssimati di  $\sqrt{2}$ .

Frajese ipotizza addirittura che l'intento di Platone fosse quello di farci ripercorrere passo passo la strada che aveva condotto i Pitagorici alla scoperta di grandezze incommensurabili, indicandoci gli ostacoli logici che di volta in volta necessitarono di essere superati<sup>63</sup>.

### ***Teeteto (147 c-148 b).***

Un altro passo in cui Platone ci rivela la sua dimestichezza con le grandezze irrazionali (oltre che il suo grande interesse per queste) si può trovare nel *Teeteto*. Qui Socrate sta cercando di ottenere da Teeteto la definizione di scienza, e non l'enumerazione di una serie di esempi di scienza. Il giovane matematico allora osserva che la domanda di Socrate era molto simile a quella che poco prima egli stesso si era posto, assieme ad altri matematici dell'Accademia.

Teodoro, qui, stava tracciando una figura sulle potenze, quella di tre piedi e quella di cinque, mostrando che esse, quanto alla lunghezza, non sono commensurabili con la misura di unità di un piede; e così scegliendole una per una fino a quella di diciassette piedi: a questa, non so perché, si è fermato. A noi, allora, venne in mente qualcosa del genere: poiché le potenze apparivano infinite di numero, sforzandoci di raccoglierle in una unità, in base alla quale dare un'unica denominazione e tutte queste potenze.

[...]

Abbiamo diviso in due l'intero insieme dei numeri: i numeri che possono derivare dalla moltiplicazione di due fattori uguali li abbiamo rappresentati con la figura del quadrato e li abbiamo chiamati numeri quadrati ed equilateri.

[...]

I numeri intermedi a questi, tra i quali ci sono anche il tre e il cinque e ogni numero che non può derivare dalla moltiplicazione di due fattori uguali, ma deriva dalla moltiplicazione di un numero maggiore per un numero minore o di un numero minore per uno maggiore, sono sempre delimitati da un lato maggiore e da uno minore: li abbiamo rappresentati con la figura del rettangolo, e li abbiamo chiamati numeri rettangolari.

[...]

Tutte le linee che fanno di un numero equilatero e piano un quadrato, le abbiamo definite «lunghezza»; tutte quelle che fanno un quadrato di un numero rettangolare, le abbiamo definite «potenze», in quanto non sono commensurabili alle precedenti per lunghezza, ma lo sono per le superfici che esse possono formare.<sup>64</sup>

63 Cfr. A. FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Studium, Roma 1963, p. 107.

64 PLATONE, *Teeteto*, 147 c-148 b.

Questo è uno dei passi matematici di maggior importanza nell'opera di Platone. Il matematico Teeteto si sta occupando di classificare le lunghezze, ben consapevole che non tutte sono commensurabili. Viene riferito che all'interno dell'Accademia il matematico Teodoro aveva elaborato una dimostrazione dell'irrazionalità di tutte le radici di quadrati non perfetti fino al 17<sup>65</sup>. Ciò che tuttavia è particolarmente notevole all'interno di questo brano, al di là della domestichezza con la quale gli irrazionali vengono trattati, è il fatto che vi si trova un criterio universale per stabilire se una grandezza è razionale o irrazionale: è sufficiente sapere se essa, quadrata, ha un'area esprimibile come numero quadrato oppure no. Ciò significa che in qualche modo l'irrazionale è stato addomesticato, che lo si è riconosciuto come una presenza sistematica più che come un'eccezione, e che si è iniziato ad elaborare dei criteri universali per riconoscerlo.

65 La scelta di fermarsi al 17 risulta strana: infatti, se Teodoro avesse elaborato una dimostrazione applicabile a tutti i quadrati non perfetti, sicuramente non vi sarebbe stata la necessità di applicarla così tante volte. D'altra parte, dimostrare con metodo via via diverso l'irrazionalità delle radici dei quadrati non perfetti fino al 17 non è minimamente sufficiente a garantire l'estendibilità della dimostrazione anche alle radici successive. Anderhub ha ipotizzato che la scelta del 17 sia dovuta alla particolare costruzione di cui Teodoro potrebbe essersi servito. Costruendo il triangolo rettangolo di cateti 1 e 1 si ottiene un'ipotenusa lunga  $\sqrt{2}$ . Tale segmento può essere usato a sua volta come cateto di un triangolo rettangolo, in cui l'altro cateto misura 1: l'ipotenusa misura stavolta  $\sqrt{3}$ , e così via. Continuando la costruzione "a conchiglia" si può proseguire fino al 17, dopodiché i nuovi triangoli rettangoli si sovrappongono graficamente a quelli precedentemente costruiti.

## CAPITOLO 3. IL PUNTO INESTESO E LO SPAZIO CONTINUO

### 1. La nuova concezione di punto.

#### *Punto esteso e punto inesteso.*

Come si è già detto, la matematica pitagorica, seppur inconsapevolmente, si fondava su un vero e proprio sistema assiomatico, il quale si era rivelato tuttavia insufficiente a rendere conto della scoperta dell'incommensurabilità. Nel capitolo precedente, ad esempio, si è visto come fosse stato necessario ripensare il concetto di  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ . Si vedrà ora come le grandezze irrazionali abbiano mostrato l'insufficienza anche di altri concetti, in particolare di quello di *punto*, rendendo evidente l'esigenza di una loro riformulazione.

Sull'importanza del concetto di *punto* per la filosofia pitagorica si è insistito a sufficienza nel primo capitolo: basti qui ricordare che esso era considerato il principio primo della realtà geometrica, in tutto e per tutto assimilato al principio della realtà aritmetica, l'*unità*. Questi due concetti erano accomunati dalla caratteristica di *non avere parti*. Il punto, in particolare, godeva di due proprietà fondamentali: l'*indivisibilità* e l'*estensione*<sup>66</sup>, esso era quindi un minimo di grandezza, un mattoncino di materia con cui costruire lo spazio geometrico, e poteva essere pensato come un sassolino o un granellino di sabbia.

Visto da vicino, tuttavia, un punto siffatto è incompatibile con l'esistenza di grandezze irrazionali. Infatti, se esistesse un punto esteso ed indivisibile, esso sarebbe di necessità contenuto un numero intero di volte in tutte le lunghezze: ogni segmento sarebbe costituito da un certo numero, elevato finché si vuole ma pur sempre finito, di questi puntimattoncino. Dunque, nel momento in cui si volesse ricercare un divisore comune tra due grandezze, l'esistenza di tale divisore sarebbe garantita a priori: nella peggiore delle ipotesi, infatti, esso coinciderebbe con il punto stesso, per definizione in grado di misurare qualsiasi segmento. Il problema di trovare il  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  tra due segmenti, in altre parole, potrebbe sempre essere risolto contando i punti in essi contenuti: il rapporto tra i punti contenuti nel primo

66 Vorrei far notare, ai fini di quanto si vedrà nel seguito, che l'indivisibilità del punto non implica la sua estensione: un punto inesteso, infatti, può a sua volta essere pensato come indivisibile, senza che questo generi contraddizione.



e nel secondo sarebbe proprio il λόγος cercato. L'esistenza di un simile punto quindi doveva essere esclusa, dal momento che l'esistenza di grandezze incommensurabili era stata inconfutabilmente dimostrata, sia per via aritmetica che geometrica.

Occorreva dunque pensare al punto come ad un *inesteso*, come ad un ente senza lunghezza, larghezza e profondità, dunque, in sostanza, al punto senza dimensioni come siamo stati abituati a pensarlo noi. Se il punto esteso così com'era stato definito dai primi Pitagorici poteva coincidere con l'unità, in quanto aveva dimensione *uno*, il punto inesteso era un ente a dimensione *zero*, la cui assimilazione con l'unità diventava più problematica<sup>67</sup>.

È facile immaginare come questo concetto possa essere risultato particolarmente difficile da padroneggiare per l'uomo greco: si trattava infatti di afferrare un qualcosa di infinitamente piccolo, noi diremmo di *infinitesimale*, ed è nota la difficoltà ad imbrigliare concettualmente l'infinito. Osserva Alfred E. Taylor che

Questa nozione di «infinitesimale» che non è precisamente nulla ma nemmeno precisamente qualcosa, bensì un nulla nell'atto di divenire qualcosa, comporta un paradosso logico<sup>68</sup>.

Probabilmente è proprio per questo che, in seguito alla scoperta dell'incommensurabilità, si ricorse spesso alla nozione di retta per definire il punto. Celebre è ad esempio la definizione di Platone tramandataci da Aristotele (su cui si avrà modo di ritornare):

Platone contestava l'esistenza di questo genere di enti, pensando che si trattasse di una pura nozione geometrica: egli chiamava i punti «principio della linea», e spesso anche usava l'espressione «linee indivisibili»<sup>69</sup>.

La definizione dei punti a partire dalla linea, quindi del più semplice a partire dal più complesso, è una scorrettezza logica che rivela proprio questa difficoltà ad afferrare, anche a livello ontologico, questi *punti*, in qualche modo sospesi tra essere e non essere<sup>70</sup>.

67 Sulle difficoltà nel ridefinire il rapporto tra punto e unità ritornerò nella seconda parte di questo lavoro, in particolare al cap. 5.

68 A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, La nuova Italia, Firenze 1968 (orig. A. E. TAYLOR, *Plato. The man and his work*, Methuen e Co., London 1926), p. 782.

69 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 9, 992 a 21-22.

70 Cfr. A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., pp. 781-782.

Al ripensamento del punto corrispose anche un'evoluzione lessicale. Nella matematica pitagorica il solo termine utilizzato per indicare i punti era *στιγμή*, termine peraltro attestato anche in Aristotele. Questo termine è sostanzialmente il corrispettivo di *punto*, e ci rimanda proprio ad una puntura, al segno che può lasciare la punta di uno spillo. Dunque, il significato veicolato da questo termine è quello di un oggetto matematico esteso, tangibile, e quindi esso è adatto ad indicare il punto-atomo dei Pitagorici. È interessante notare come Boezio, traducendo gli *Elementi* di Euclide, scelga di utilizzare la parola *punctum*, perfettamente corrispondente a *στιγμή*.

Tuttavia, in Platone questo termine è completamente assente. Nel momento in cui il filosofo aveva necessità di indicare il punto geometrico egli preferiva utilizzare un'altra parola: *σημεῖον*, ossia *segno*; ed anche in Euclide si attesta esclusivamente questo termine. La scelta di sostituire *στιγμή* con *σημεῖον* rivela la volontà di indicare un qualcosa di molto più astratto e molto meno fisico: il punto inesteso e ideale, così come occorre pensarlo dopo la scoperta dell'incommensurabilità<sup>71</sup>.

### ***La concezione razionale degli enti geometrici.***

Il punto, così ridefinito, assieme alla sua estensione spaziale, perde inevitabilmente anche l'estensione fisica, la sua materialità, grazie alla quale esso poteva svolgere il ruolo di *principio delle cose*. È infatti evidente che, se tale punto *esiste*, senz'altro non può esistere allo stesso modo in cui esistono gli enti, tangibili, che noi esperiamo in questo mondo: esso deve necessariamente appartenere ad una dimensione ontologica altra, ossia al regno della ragione. E, assieme al punto, tutti gli enti geometrici devono essere ripensati come puramente astratti, razionali. I quadrati, i triangoli, le rette con cui opera il matematico non sono gli stessi con cui può operare, ad esempio, un architetto: essi appartengono alla pura *idealità*. Scrive Platone:

Sai [...] che [gli esperti di geometria] usano modelli visibili e costruiscono su di essi le dimostrazioni; ma nel ragionamento non hanno per oggetto tali realtà, bensì le realtà a cui queste assomigliano, sicché quando ragionano hanno di mira il quadrato in quanto

71 Cfr. I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., pp. 415-416; E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 43.

tale, la diagonale in quanto tale, e non quel quadrato, quella diagonale, quella data figura che vanno disegnando. Delle figure che compongono e tracciano, le quali corrispondono alle ombre e alle immagini che si formano sull'acqua, si servono come di immagini per cercare di vedere le realtà in sé che non si possono cogliere altrimenti che con l'intelligenza<sup>72</sup>.

Si ha quindi, nel periodo della scoperta dell'incommensurabilità, uno stacco dalle geometrie pre-elleniche e dalle prime geometrie greche, caratterizzate da materialità ed empiricità. Si faccia attenzione al fatto che il legame logico tra incommensurabilità ed astrazione degli enti matematici va letto in entrambe le direzioni: il fatto che tra due segmenti non sia possibile trovare un divisore comune non solo implica, ma anche presuppone, che questi segmenti siano puramente ideali. Si tratta di due processi che probabilmente interessarono pressoché in contemporanea la matematica greca, e che si alimentarono l'un l'altro<sup>73</sup>.

La ricollocazione degli enti matematici in una dimensione altra, inoltre, non è indipendente dal processo di apertura ad un mondo ultraterreno, astratto e puramente razionale: processo che culmina con la postulazione platonica del mondo delle idee. L'analogia tra queste idee, concepite come perfette e separate dal mondo fisico, e gli enti matematici razionali è infatti evidente, il brano della *Repubblica* riportato più sopra ne è una testimonianza. È estremamente significativo notare, a tal proposito, che nei dialoghi platonici la teoria delle idee si sviluppa man mano che la presenza di elementi matematici si fa sempre più frequente ed importante.

Non è senz'altro un caso che gli enti matematici nella *Repubblica* siano pensati come ontologicamente intermedi tra gli enti materiali e le idee, e che il loro studio sia considerato propedeutico alla conoscenza delle stesse idee. Proclo, addirittura, ritiene che lo stesso termine *matematica* derivi dalla funzione di questa disciplina:

Questa è dunque la «mathesis»: reminiscenza delle idee eterne che sono nell'anima; ed essa è il motivo per cui lo studio che ci soccorre egregiamente per la reminiscenza di quelle idee ha preso il nome di matematica<sup>74</sup>.

72 PLATONE, *Repubblica*, Libro VI, 510 d-511 a.

73 Cfr. K.VON FRITZ, *Le origini della scienza in Grecia*, Il mulino, Bologna 1988 (orig. K. VON FRITZ, *Der Ursprung der Wissenschaft bei den Griechen*, pp. 1-326 di *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Walter De Gruyter & Co., Berlin-New York 1971), pp. 67-68.

74 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 46.

È possibile che Platone, esplicitando il valore propedeutico della conoscenza matematica, ci stia in qualche modo rendendo partecipi del percorso che egli stesso aveva seguito, e che l'aveva portato a prendere coscienza dell'esistenza di un livello ontologico superiore. In altre parole, Platone forse qui ci sta raccontando la genesi della sua dottrina, proprio a partire da riflessioni sulla natura degli enti matematici<sup>75</sup>.

## **2. Lo spazio continuo.**

Il ripensamento del punto da esteso a inesteso porta con sé il necessario ripensamento anche dello spazio geometrico, che da *discreto* diventa *continuo*. Lo spazio si definisce *discreto* quando è composto da elementi distinti, tra i quali c'è soluzione di continuità: dunque uno spazio come quello pitagorico, composto di innumerevoli granellini distinti tra loro, è uno spazio discreto, sul quale si procede “a salti” da un punto all'altro, senza possibilità di fermarsi in posizioni intermedie. Si definisce invece *continua* qualsiasi grandezza che non sia composta di elementi uno distinto dall'altro, e quindi una grandezza in cui presi due valori, per quanto prossimi tra loro, sia sempre possibile trovare un terzo compreso tra questi. Intuitivamente capiamo come siano “continue” scale di valori come il tempo, il peso, la temperatura.

Anche lo spazio geometrico, dopo la scoperta dell'incommensurabilità, richiedeva di essere ripensato secondo i canoni della continuità: perché due lunghezze non abbiano divisori in comune il processo di divisione di queste lunghezze dev'essere infinito, non deve mai essere possibile arrestarsi ad un'unità spaziale minima. Presi due qualsiasi punti deve sempre e comunque essere possibile determinare un terzo punto, intermedio tra i due. L' $\alpha\nu\theta\upsilon\varphi\alpha\iota\tau\epsilon\sigma\iota\varsigma$  non potrebbe altrimenti mai essere infinita, essa si arresterebbe nel momento in cui si arrivasse a formare una figura così piccola da avere i lati coincidenti con il punto. Si dovrebbe così ammettere che tutte le grandezze sono commensurabili, il che cozza con le prove puramente aritmetiche che dell'incommensurabilità erano state date.

Scrive Proclo:

75 Cfr. A. FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, cit., p. 60.

Il contatto ha luogo nelle grandezze continue – e quindi quelle relative alle grandezze irrazionali, perché dove c'è divisione all'infinito, lì c'è anche l'irrazionale<sup>76</sup>.

Il geometrico diventa dunque il regno del continuo, concetto strettamente legato a quello di *infinito* e a quello di irrazionale. Questa ridefinizione dello spazio viene rapidamente assimilata, fino al punto di essere data spesso per scontata. Si ricordi, ad esempio, il passo del *Menone* già esaminato nel capitolo precedente: quando Socrate chiede al ragazzo se sia possibile costruire un quadrato di area doppia rispetto a quello di partenza, questi risponde affermativamente senza esitazione: si tratta di un'affermazione implicita di continuità. Anche in Euclide la continuità viene presupposta senza che vi sia il bisogno di esplicitarla: ad esempio, egli descrive il procedimento per dividere a metà una retta data, il che equivale a trovare il punto medio tra gli estremi della retta stessa: è evidente che l'esistenza di tale punto medio è data per scontata<sup>77</sup>.

Nonostante possa sembrare semplice pensare la retta come costituita da infiniti punti inestesi, vedremo che la relazione che sussiste tra punto e retta è tutt'altro che chiara per l'uomo greco, e le difficoltà nello spiegarsi questa relazione non sono indipendenti dal disagio che questi provava nel gestire concettualmente l'infinito. Come un ente che non ha dimensione possa arrivare a costituire un ente che invece una lunghezza ce l'ha, è dunque qualcosa che necessita di essere spiegato. Aristotele ci riporta una teoria, forse attribuibile ad Archita di Taranto:

Dicono che la linea col suo movimento produce una superficie, il punto una linea<sup>78</sup>.

Dunque, la retta non risulterebbe dalla sommatoria di infiniti punti infinitamente piccoli, piuttosto sarebbe prodotta dal punto per scorrimento. Anche Platone e lo stesso Aristotele hanno fatto dei tentativi di spiegare la relazione tra punto e retta, tra punto e spazio continuo: se ne parlerà nel seguito di questo capitolo.

76 PROCLIO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 60.

77 EUCLIDE, *Elementi*, I, 10.

78 ARISTOTELE, *De Anima*, 409 a 3-5. Per l'attribuzione di questa dottrina ad Archita di Taranto cfr. B. CENTRONE, *Introduzione ai Pitagorici*, cit., p. 138.

### **3. I paradossi di Zenone.**

Grossomodo in contemporanea agli studi sull'incommensurabilità vedono la luce i celebri paradossi di Zenone di Elea, che, pur partendo da intenti e presupposti diversi, mettono a loro volta in discussione il concetto di spazio così com'era stato pensato dai Pitagorici. Sebbene non sia possibile stabilire con certezza una relazione tra la scoperta dell'incommensurabilità e la formulazione di questi paradossi, tale relazione resta perlomeno fortemente probabile.

Si vedrà ora quali siano le conseguenze logiche di questi paradossi, ed in che modo essi potrebbero essere correlati alla scoperta dell'incommensurabilità. Si è scelto in particolare di presentare tre degli argomenti contro il moto, oltre ad alcune testimonianze significative riguardanti la concezione zenoniana del punto.

#### ***L'argomento della dicotomia e dell'Achille.***

Il cosiddetto argomento “della dicotomia” ci è riportato da Aristotele:

Il primo [argomento] intende provare l'inesistenza del movimento per il fatto che l'oggetto spostato deve giungere alla metà prima che al termine finale<sup>79</sup>.

Zenone osserva che per percorrere uno spazio finito sarebbe necessario prima raggiungerne la metà, e prima ancora la metà della metà, e così via: dunque, percorrere un qualsiasi intervallo spaziale, anche piccolissimo, implica di fatto il percorrere infiniti intervalli, il che non può avvenire in un tempo finito: il moto, quindi, è logicamente inaccettabile, e dev'essere negato.

L'argomento “dell'Achille” è molto simile a quello appena visto: ce ne parla sempre Aristotele:

Questo [argomento] intende provare che il più lento, correndo, non sarà mai sorpassato dal più veloce: infatti, necessariamente, l'inseguitore dovrebbe giungere

79 ARISTOTELE, *Fisica*, VI, 239 b 11-14.

prima là donde il fuggitivo è balzato in avanti; sicché necessariamente il più lento conserva una certa precedenza<sup>80</sup>.

Il significato sostanzialmente è questo: nel momento in cui un corpo più veloce insegue un corpo più lento (nel nostro immaginario Achille pié veloce insegue una tartaruga), prima di raggiungerlo dovrà guadagnare la posizione P<sub>1</sub> in cui si trovava inizialmente l'inseguito, che nel frattempo avrà raggiunto la posizione P<sub>2</sub>; nel momento in cui l'inseguitore sarà arrivato in P<sub>2</sub> l'inseguito sarà arrivato in P<sub>3</sub> e così via, rendendo chiaramente impossibile ciò che invece è ai sensi assolutamente evidente, ossia che il corpo più veloce raggiunge il più lento. Anche in questo caso, il moto si rivela intrinsecamente contraddittorio, dal momento che qualsiasi spazio, che all'apparenza sembra finito, è invece sempre composto da infiniti intervalli e dunque impercorribile in un tempo finito.

In questi due paradossi, Zenone, più o meno consapevolmente, presuppone che lo spazio sia continuo, ossia che proseguendo con successive divisioni non si arrivi mai ad un minimo di estensione, ad una lunghezza atomica. E lo spazio continuo implica l'inquietante presenza dell'infinito, presenza che Zenone sfrutta sviluppandone le complesse conseguenze, fino a generare una situazione aporetica.

È fondamentale notare, tuttavia, che il concetto di *infinita divisibilità* è ancora confuso in Zenone, diremmo che esso è ancora ad uno stato embrionale, e che vi è ancora un'evidente difficoltà a distinguere tra l'infinita estensione e l'infinita divisibilità, ossia tra l'infinito *per somma* e l'infinito *per divisione*<sup>81</sup>.

### ***Il paradosso della freccia.***

Il terzo paradosso di Zenone, detto “della freccia”, parte da presupposti di carattere diverso. Scrive Aristotele:

Zenone cade in un paralogismo, quando dice: se sempre ogni cosa è in quiete [o in moto], quando sia in un luogo uguale ad essa, e se l'oggetto spostato è sempre in un istante, la freccia, nell'atto in cui è spostata, è immobile<sup>82</sup>.

80 Ivi, VI, 239 b 15-18.

81 Cfr. G. CALOGERO, *Studi sull'eleatismo*, La nuova Italia, Firenze 1977, pp. 145-150.

82 ARISTOTELE, *Fisica*, VI, 239 b 5-8.

Il significato del paradosso è sostanzialmente questo: noi percepiamo una freccia in movimento, tuttavia, a ben guardare, in ciascun istante essa si trova una posizione ben precisa, ed occupa uno spazio esattamente uguale alla sua lunghezza, quindi, in ciascun istante, la freccia è *immobile*. Dunque, dovremmo ammettere che il movimento si origini da una sommatoria di stati di immobilità, il che è un'evidente contraddizione.

In questo caso, Zenone presuppone che la freccia si sposti in uno spazio e in un tempo discreti, che il suo movimento sia come “a scatti”, scomponibile in una serie di “fotogrammi” tra i quali vi è soluzione di continuità. Si noti che questa aporia, a differenza delle precedenti, proprio per il suo demolire la possibilità del moto in uno spazio discreto, può essere letta anche come una polemica contro il pitagorismo, e quindi contro l'idea di una realtà costituita di punti-unità aventi estensione.

Con ogni probabilità, ad ogni modo, l'intento di Zenone non era tanto polemizzare contro l'una o l'altra concezione di spazio, quanto di mostrare le assurdità in cui cade che sostiene l'esistenza di un essere diveniente, e quindi in movimento, tanto in uno spazio continuo quanto in uno discreto<sup>83</sup>. Tuttavia, le sue osservazioni sono fondamentali per capire l'evoluzione nel modo di concepire lo spazio, in corso proprio nell'epoca in cui si trovò ad operare Zenone.

### ***Il punto e la retta.***

Si è già in precedenza parlato delle difficoltà in cui si incorreva nello spiegare il legame tra punto e retta: il fatto che una grandezza avente dimensione fosse originata dal punto, che invece di dimensioni era privo, appariva infatti come una contraddizione, e lo stesso punto, quasi sospeso tra essere e non essere, era molto difficile da afferrare concettualmente. Possediamo un frammento particolarmente significativo, che ci rivela l'interesse di Zenone per tali questioni:

83 Si è più volte tentato di ridurre ad unità i paradossi contro il moto, riconducendoli perlopiù ad una polemica contro il pitagorismo. Tuttavia, vi è motivo di escludere che i quattro argomenti muovessero effettivamente da un intento comune, e che vi fosse organicità fra essi, o perlomeno a noi è impossibile stabilirlo con certezza. A tal proposito si rinvia a G. CALOGERO, *Studi sull'eleatismo*, cit., pp. 139-145.



Egli suppone il punto come un nulla, poiché ciò che, aggiunto, non produce aumento, o, tolto, diminuzione, non lo considerava come appartenente agli esseri<sup>84</sup>.

Si tratta di un frammento tratto dalle argomentazioni zenoniane contro la molteplicità. Non è chiaramente questa la sede adatta ad approfondire questa tematica, decisamente troppo vasta e non inerente al percorso che sto seguendo: quello che mi preme qui osservare sono le difficoltà che Zenone rileva nel descrivere il punto. L'esistenza di questo "ente" geometrico porta con sé quella che appare come un'insanabile aporia: o il punto è divisibile, nel qual caso per definizione esso non è più un punto (che, come si ricorderà, *non ha parti*), oppure esso è indivisibile, e quindi esso è un nulla. Infatti un punto indivisibile, e quindi inesteso, non può appartenere propriamente all'essere: se aggiunto o sottratto ad un segmento, esso non ne modifica la lunghezza, e dunque esso è di fatto inesistente, o meglio, *non è*. Si ripresenta dunque qui la difficoltà, già messa precedentemente a fuoco, di afferrare concettualmente, e di conferire lo statuto di *essere*, a questo punto che sembra più propriamente un *nulla* che un *qualcosa*.

La stessa retta non può risultare dalla somma di infiniti punti, giacché in tal caso sarebbe essa stessa inestesa, e quindi inesistente. Maria Timpanaro Cardini trova una conferma di ciò nel seguente frammento:

E ancora, secondo il ragionamento di Zenone, una grandezza deve necessariamente essere senza parti [indivisibile], dal momento che è impossibile, in un tempo finito, toccarne tutte le parti infinite<sup>85</sup>.

Qui la studiosa commenta:

Ma Zenone non dice, che una grandezza debba essere di necessità indivisibile; dice, che non deve essere considerata come una serie successiva di punti<sup>86</sup>.

Si ripresenta quindi la già esaminata difficoltà logica a pensare che un ente esteso possa originarsi da uno inesteso.

84 SIMPLICIO, *Phys*, 97, 13. Per la traduzione di questo frammento, ci si è riferiti a quella proposta da Maria Timpanaro Cardini in *Gli Eleati. Frammenti e testimonianze*, R. Carabba Editore, Lanciano 1931, pp. 110-111.

85 ARISTOTELE, *De lineis Insecabilibus*, 968 a 18. Per la traduzione di questo frammento, ci si è riferiti a quella proposta da Maria Timpanaro Cardini in *Gli Eleati. Frammenti e testimonianze*, cit., p. 112.

86 M. TIMPANARO CARDINI (a cura di), *Gli Eleati. Frammenti e testimonianze*, cit., p. 112 (n).

### ***Zenone e l'incommensurabilità.***

Una questione molto dibattuta, che merita qui di essere almeno richiamata, è quella relativa al legame dei paradossi di Zenone con la scoperta dell'incommensurabilità. Che questo legame esista risulta assolutamente probabile, tenuto anche conto che i due avvenimenti sono pressoché contemporanei. È evidente l'analogia dello spazio zenoniano, che può sempre essere diviso infinitamente a metà, con lo spazio in cui avviene l'ἀνομοιομετρικὸς, che nel pentagono e nel quadrato prosegue senza fine, dividendo ciascun segmento in parti sempre più piccole. È abbastanza verosimile che, nell'immaginare lo spazio in cui Achille si muove, Zenone abbia tenuto conto dello spazio continuo presupposto dagli studi sull'incommensurabilità.

È stata tuttavia formulata anche l'ipotesi inversa, ossia che le speculazioni di Zenone sullo spazio continuo siano state la premessa indispensabile per sviluppare le analisi sul pentagono e sul quadrato. In effetti, i matematici egizi e babilonesi, che pure avevano familiarità con molte delle coppie di grandezze poi provate incommensurabili, non erano mai riusciti a mettere a fuoco l'impossibilità di principio di trovare un loro divisore comune. Verosimilmente, quindi, i matematici greci che portarono a termine la scoperta dovettero avere un qualche tipo di stimolo, che gli Egizi e i Babilonesi non avevano avuto, e che li spinse a condurre le loro analisi nel modo che conosciamo: questo stimolo, appunto, potrebbe proprio essere l'opera di Zenone<sup>87</sup>. In questo caso, però, si dovrebbe ammettere che la scoperta sia avvenuta successivamente alla formulazione dei paradossi, il che impedirebbe di attribuirli ad Ippaso di Metaponto, come vorrebbe invece la tradizione.

Walter Burkert osserva inoltre che Zenone utilizza nelle sue dimostrazioni sia la *reductio ad absurdum*, sia il *regressus in infinitum*: si tratta di due procedimenti logici che sono utilizzati anche nella prova di incommensurabilità attraverso l'ἀνομοιομετρικὸς vista precedentemente: questa sarebbe un'ulteriore ragione di supporre che i paradossi sul moto siano stati propedeutici agli studi sull'incommensurabilità<sup>88</sup>.

87 Cfr. K. VON FRITZ, *Le origini della scienza in Grecia*, cit., pp. 51-52, J. A. PHILIP, *Pythagoras and early pythagoreanism*, University press, Toronto 1968, p. 31.

88 Cfr. W. BURKERT, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, cit., p. 425.

### *Spazio fisico e spazio geometrico in Zenone.*

Un'ultima questione merita di essere qui messa a fuoco riguardo all'opera di Zenone. Come si è visto, la scoperta dell'incommensurabilità porta con sé il ripensamento degli enti matematici in senso puramente astratto: il punto, che inizialmente era considerato un ente fisico, diviene ora di necessità un ente di ragione, assolutamente indipendente dalla materia. D'altra parte, il fatto che la materia possa essere composta di unità minime indivisibili non è in contraddizione col fatto che lo spazio geometrico sia un continuo, dal momento che i due spazi appartengono l'uno alla ragione, l'altro al mondo fisico. La consapevolezza dell'indipendenza dei due piani, tuttavia, venne guadagnata nel tempo.

L'opera di Zenone da questo punto di vista è particolarmente significativa, poiché si può osservare come in essa questa separazione degli enti fisici da quelli matematici non sia ancora avvenuta completamente, o perlomeno come essa non sia ancora stata messa chiaramente a fuoco. Come si ricorderà, nella prima filosofia pitagorica il punto, essendo materiale, svolgeva il ruolo di costitutivo fisico delle cose, ed è proprio su tale sovrapposizione punto-atomo che le aporie sul moto si fondano. Con Zenone, lo spazio geometrico si sviluppa astrattamente, obbedendo alle regole della logica. Tuttavia, egli non riesce a mettere a fuoco che questo non coincide con lo spazio fisico, e dalla continuità dello spazio geometrico pretende di dedurre la continuità della materia. È proprio da questo fraintendimento che si originano i paradossi.

Zenone è un eleate, e quel che egli scopre nel pensiero, egli pensa d'averlo scoperto nella realtà, non distinguendo ancora nettamente tra pensiero e realtà, né tra logica e ontologia<sup>89</sup>.

Von Fritz mette in luce come lo scarto tra spazio logico e spazio reale stia alla base dei paradossi di Zenone, anche nel senso che essi si basano su certi limiti della nostra percezione. Razionalmente accettiamo le regole che vigono nello spazio astratto, sebbene la nostra capacità cognitiva non ci dia modo di verificarle nella realtà. In particolare, Von Fritz rileva che:

89 G. CALOGERO, *Studi sull'eleatismo*, cit., p. 151.

Il modo in cui un continuo, come sembra essere il movimento, si presenta alla percezione dei sensi in cui la suddivisione in parti sempre più piccole si scontra con un limite inferiore di percettività [dà] luogo ad un settore intermedio non ben definibile tra comprensione discreta e comprensione continua dei fenomeni<sup>90</sup>.

In definitiva, dunque, si rileva in Zenone la presa di coscienza della necessità di ripensare lo spazio geometrico secondo le categorie del continuo, ma anche la difficoltà a scindere questo spazio dalle sue manifestazioni fisiche e dalla percezione che noi stessi di questo spazio abbiamo.

#### **4. La concezione platonica dello spazio.**

##### ***Due testimonianze problematiche.***

Sulla concezione che Platone ebbe dello spazio non vi è unanimità di pareri; al contrario, si tratta di una problematica che ha suscitato un vivace dibattito. La controversia ha origine dalla presenza di due testimonianze che attribuirebbero a Platone una concezione dello spazio come “discreto” e del punto come “esteso”: tale posizione sembra decisamente inconciliabile con la scoperta dell'incommensurabilità, scoperta di cui il filosofo ateniese era senz'altro al corrente, e per la quale aveva, come si è visto, uno spiccato interesse.

La prima testimonianza è contenuta nella *Metafisica* aristotelica, dove si legge:

Inoltre, da che cosa deriveranno i punti contenuti nella linea? Platone contestava l'esistenza di questo genere di enti, pensando che si trattasse di una pura nozione geometrica: egli chiamava i punti «principio della linea», e spesso usava anche l'espressione «linee indivisibili»<sup>91</sup>.

La seconda testimonianza, invece, è contenuta in un trattatello peripatetico, tradizionalmente attribuito ad Aristotele, ma la cui autenticità è perlomeno dubbia.

90 K. VON FRITZ, *Le origini della scienza in Grecia*, cit., p. 50.

91 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 9, 992 a 21-22.

Affermano che anche dalle dottrine degli stessi matematici si ricava che potrebbe esserci una linea atomica, se cioè «sono commensurabili le linee che vengono riportate alla stessa misura, e se d'altra parte tutte quelle che sono misurabili devono essere commensurabili (infatti potrebbe esserci una misura di lunghezza che le misura tutte quante)». Questa (misura di lunghezza) deve però essere necessariamente indivisibile. Se fosse divisibile, anche le parti allora avrebbero bisogno di una misura – esse sono infatti commensurabili al tutto –, e perciò <la misura> di una determinata parte sarebbe (di volta in volta) la metà di un doppio. – Poiché però questo è impossibile, potrebbe esserci una misura indivisibile<sup>92</sup>.

Entrambe le testimonianze, quindi, sembrerebbero attribuire a Platone una teoria delle «linee indivisibili», che sarebbero dei segmenti di estensione minima, non più divisibili, e che svolgerebbero sostanzialmente la funzione che svolgeva il punto esteso.

Di fronte a tale testimonianza, i commentatori hanno assunto sostanzialmente due diversi atteggiamenti: alcuni hanno tentato di mostrare come il punto esteso sia in realtà compatibile con l'esistenza di grandezze incommensurabili, ed anzi, ne costituisca addirittura un fondamentale presupposto; altri invece hanno tentato di mostrare come le parole di Platone, se correttamente lette, non vogliono affatto dire che il punto è esteso.

### ***L'ipotesi di Gaiser.***

Per quanto riguarda il primo gruppo di commentatori, un'ipotesi a mio avviso significativa è quella formulata da Konrad Gaiser, ed esposta nel suo *Platons unbeschriebene Lehre*. Basandosi sulla testimonianza contenuta nel *De Lineis Insecabilibus* egli ha sostenuto la presenza della dottrina delle linee indivisibili nell'opera di Platone e ne ha fornito una giustificazione<sup>93</sup>.

Se il punto fosse inesteso e lo spazio fosse continuo, qualsiasi grandezza sarebbe per sua natura sempre divisibile, e ciò comporterebbe due assurdi: in primo luogo diventerebbe impossibile fissare delle grandezze assolute, possibilità che invece per Platone dev'essere necessariamente salvata; in secondo luogo, un punto inesteso farebbe cadere la distinzione

92 ARISTOTELE, *De Lineis Insecabilibus*, 968 b. Per la traduzione, ci si è attenuti a quella proposta da K. GAISER in *La dottrina non scritta di Platone. Studi sulla fondazione sistematica e storica delle scienze nella scuola platonica*, Vita e pensiero, Milano 1994 (orig. K. GAISER, *Platons unbeschriebene Lehre*, Klett-Cotta, Stuttgart 1962), p. 166.

93 Cfr. K. GAISER, *La dottrina non scritta di Platone*, cit., pp. 165-170.

tra grandezze commensurabili e incommensurabili, distinzione che invece era stata rigorosamente dimostrata.

Quest'ultima osservazione ribalta sostanzialmente l'argomentazione per cui sarebbe il punto esteso a compromettere l'esistenza di grandezze incommensurabili. Come si è visto, infatti, tale punto sarebbe di necessità contenuto un numero intero di volte in tutti i segmenti, rendendoli così commensurabili. Secondo Gaiser, invece:

La diversità essenziale tra grandezze razionali (commensurabili) e grandezze irrazionali (per esempio, lato e diagonale nel quadrato o nel pentagono) consiste in ciò: *il segmento razionale è costituito da determinate unità di misura che non possono essere contenute nella grandezza irrazionale: la divisione irrazionale infrange la struttura interna del segmento irrazionale perché non coincide con la disposizione razionale.*

Una tale opposizione verrebbe eliminata, e con essa verrebbe *relativizzata* la differenza tra grandezze razionali e irrazionali – è questa l'idea di fondo –, se (nella linea razionalmente determinata) non ci fossero unità elementari indivisibili che fissano la singola parte razionale al tutto, e se quindi per tutte le linee si dovesse ipotizzare un continuo passaggio verso l'infinitamente piccolo e verso il nulla<sup>94</sup>.

Potremmo dire che le grandezze incommensurabili sono prodotte da minimi lineari reciprocamente incommensurabili: se questi fossero infinitamente frazionabili, si giungerebbe ad un punto inesteso che per sua natura sarebbe contenuto in tutte le grandezze, e allora sarebbe veramente impossibile distinguere tra grandezze commensurabili ed incommensurabili. Platone avrebbe così accettato di ritornare ad una concezione discreta della spazio proprio per salvare l'incommensurabilità.

Questa, sempre secondo la lettura di Gaiser, sarebbe riconducibile esclusivamente all'incommensurabilità tra dimensioni diverse, come ad esempio tra linea e superficie, e non sarebbe riscontrabile tra grandezze appartenenti alla stessa dimensione. La diagonale del quadrato, ad esempio, sarebbe incommensurabile con il lato poiché essa, a rigore, appartiene alle grandezze superficiali e non alle lineari (e, secondo la lettura proposta da Gaiser, le diverse dimensioni appartengono a livelli ontologici irriducibili tra loro). Tale osservazione sull'incommensurabilità potrebbe essere motivata dal fatto che lato e diagonale sono commensurabili solo nelle superfici quadrate che generano, e che la diagonale di un quadrato è il lato del suo quadrato doppio<sup>95</sup>. Si tratta di una lettura

94 Cfr. ivi, p. 168.

95 Cfr. ivi, pp. 169-170.

dell'incommensurabilità a mio avviso non particolarmente convincente: vi è una chiara differenza tra una misura di superficie ed una misura lineare che a tale superficie allude, e Platone rivela nelle sue riflessioni sull'incommensurabilità un acume tale per cui è difficile attribuirgli una sovrapposizione così grossolana.

Anche le argomentazioni sull'estensione del punto non sono a mio avviso particolarmente stringenti. Date due grandezze, come si è detto, esse sono commensurabili se è *possibile* determinare un segmento, avente ovviamente una ben determinata estensione, che sia contenuto in entrambi un numero intero di volte. Nel suddividere lo spazio in parti sempre più piccole, alla ricerca di un divisore comune, dev'essere possibile arrestarsi ad un segmento il quale è, per dirla con Aristotele, *potenzialmente* ancora divisibile, ma *attualmente* già in grado di misurare entrambi i segmenti di partenza. Se due grandezze sono incommensurabili, tale segmento non esiste, e il processo di divisione dello spazio deve necessariamente continuare all'infinito, mentre se esse sono commensurabili, è possibile arrestare il processo senza che questo implichi che il segmento trovato sia per sua natura indivisibile. Quella di Gaiser è dunque un'argomentazione basata su una confusione che difficilmente si può attribuire a Platone.

### ***Dubbi sull'attribuzione a Platone della teoria delle linee indivisibili.***

Oltre a Gaiser, esistono vari studiosi che, prestando fede alle testimonianze aristoteliche, hanno attribuito a Platone una concezione discreta dello spazio. Tuttavia esistono, a mio parere, validi motivi per ritenere tale attribuzione, se non impossibile, almeno fortemente improbabile.

In primo luogo, in nessun punto dell'opera di Platone si fa esplicitamente riferimento ad una dottrina delle linee indivisibili, o ad una concezione discreta dello spazio. Gli unici elementi a nostra disposizione per supporre che Platone abbia sposato queste concezioni sono appunto i due brani in cui Aristotele vi fa riferimento, i quali, essendo fonti secondarie, vanno presi con la dovuta cautela. Per giunta, nella testimonianza tratta dal *De Lineis Insecabilibus* Platone non è esplicitamente nominato: l'attribuzione a lui delle posizioni criticate è solo un'ipotesi, nel giudicare la quale si deve tener conto che molte fonti antiche attribuiscono la dottrina delle linee indivisibili non a Platone, ma a Senocrate.

Esistono poi dei frammenti che testimoniano l'esatto contrario rispetto a quelli fin qui considerati, ossia che Platone concepì lo spazio come un continuo. Ad esempio, scrive Simplicio, riportando un commento di Porfirio:

Non potremmo mai giungere ad un indivisibile, continuando a tagliare, perché il cubito è un continuo. Ma il continuo si divide in parti che sono sempre ulteriormente divisibili<sup>96</sup>.

Lo stesso Aristotele in alcuni punti sembra in qualche modo ammettere che lo spazio platonico fosse continuo. Ad esempio, nel terzo Libro della *Fisica* scrive:

Anche Platone [...] concepì due infiniti, perché sembra che ci sia un superamento e un processo verso l'infinito sia per accrescimento sia per diminuzione. Ma, pur avendo ammesso due infiniti, egli non ne fa uso: infatti, secondo lui, nei numeri non esiste affatto l'infinito per detrazione, perché la monade è il minimo, né per aggiunzione, perché egli concepisce il numero fino alla decade<sup>97</sup>.

Dunque, si nega che l'infinito per detrazione possa trovarsi nell'universo dei numeri, ma non in quello delle grandezze geometriche, che dunque implicitamente assume l'attributo della continuità.

Se dunque tra le testimonianze non vi sono prove stringenti per attribuire a Platone una concezione discreta dello spazio, all'interno dei dialoghi si trovano dei motivi per ipotizzare che tale concezione fosse invece continua.

In primo luogo, come si è già mostrato, il filosofo ateniese aveva una conoscenza dell'irrazionale geometrico assolutamente precisa, oltre che un forte interesse per la questione. Esistono numerosi passaggi nei quali egli parla di segmenti che quadrano aree non esprimibili come  $n^2$ , dunque è chiaro che tali segmenti irrazionali *esistono*, ed era stato mostrato come essi necessitassero, per essere giustificati, di essere collocati in uno spazio continuo. Nel passaggio del *Menone* precedentemente analizzato, quando Socrate chiede se sia possibile costruire un quadrato doppio, il ragazzo risponde affermativamente, senza

96 SIMPLICIO, *Commentario alla «Fisica» di Aristotele*, 453, 37-454, 3. Per la traduzione ci si è basati su quella proposta in J. N. FINDLAY, *Platone. Le dottrine scritte e non scritte*, cit., p. 404.

97 ARISTOTELE, *Fisica*, III, 206 b 27-33.



esitazione: questa risposta può essere letta come un'implicita affermazione di continuità dello spazio<sup>98</sup>.

E il concetto di grandezza continua (dove per grandezza non si intende solo l'estensione spaziale) doveva senz'altro essere chiaro al nostro filosofo. C'è, ad esempio, un passaggio del *Filebo* in cui Platone si riferisce al genere dell'indeterminato:

Prendiamo l'indefinito processo, crescente o decrescente del caldo del caldo o del freddo, non incluso da nessuna determinazione. Osserva un poco intanto se saresti capace di pensare in questo processo un termine determinante o finiente. Al contrario, invece, nel caldo e nel freddo la presenza di questo processo crescente o decrescente, finché tale presenza si mantiene, non potrà concedere che sorga nell'uno o nell'altro un termine o una determinazione qualsiasi.

Il caso del caldo e del freddo è paradigmatico del genere dell'indeterminato, poiché la temperatura può essere aumentata o diminuita infinitamente, e può assumere qualsiasi valore: date due temperature, ne esiste sempre una intermedia. Dunque, essa è un continuo. È evidente che Platone ha chiara questa nozione, ed è dunque ipotizzabile che essa potesse essere estesa anche alle grandezze geometriche.

Anche a livello terminologico troviamo conferma della nostra ipotesi: Platone, infatti, per indicare il punto geometrico utilizza *σημεῖον*, che, come si è visto, si impose a livello lessicale al posto del pitagorico *στιγμή* nel momento in cui fu necessario pensare il punto come astratto ed immateriale. D'altra parte, ciò non fa meraviglia, dal momento che, come si è visto, gli enti matematici in Platone erano pensati alla stregua delle idee: non si vede perché il punto, che non ha più nulla a che vedere con il mondo materiale, debba essere pensato come esteso.

Va infine osservato che la prima testimonianza aristotelica parla anche a favore di una interpretazione del punto come inesteso. Quando il filosofo dice: «Platone contestava l'esistenza di questo genere di enti, pensando che si trattasse di una pura nozione geometrica: egli chiamava i punti “principio della linea”», ci suggerisce che Platone avesse difficoltà ad afferrare concettualmente i punti. Potrebbe trattarsi di quella difficoltà, già precedentemente messa a fuoco, a definire un qualcosa di sospeso tra essere e non essere, che nasceva proprio nel momento in cui il punto veniva pensato come inesteso. Esiste

98 Cfr A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, cit., p. 73.

peraltro nei dialoghi un passaggio in cui lo stesso Platone fa uso di una definizione analoga, il che accrediterebbe la testimonianza aristotelica. Nel *Menone* infatti leggiamo:

La figura è limite del solido<sup>99</sup>

Come si vede, le due definizioni, perfettamente corrispondenti, definiscono l'ente geometrico più semplice come fattore limitante dell'ente geometrico più complesso.

### ***L'ipotesi di Elisabetta Cattanei.***

Sono stati fatti numerosi tentativi di conciliare le controverse testimonianze aristoteliche con una concezione continua dello spazio in Platone. Taylor, ad esempio, si è occupato di spiegare il primo frammento analizzato. Egli ha rimarcato come la definizione dei punti a partire dalla linea sia in realtà una conferma dell'inesistenza del punto, e ha tentato di giustificare l'attribuzione a Platone della teoria delle linee indivisibili:

Io suggerirei che egli intendesse precisamente negare la concezione attribuita a qualcuno dell'Accademia, evidentemente Senocrate, dall'opuscolo peripatetico. Una linea, per quanto breve sia, è "indivisibile" nel senso che non la si può dividere in elementi che non siano essi stessi linee; in altre parole, essa è un "continuum". Il punto produce una linea non già per addizione o aggiunta, ma "scorrendo"; una linea, retta o meno, non è fatta di punti al modo in cui una parete è fatta di mattoni disposti l'uno accanto all'altro<sup>100</sup>.

Un'altra ipotesi che permetterebbe di salvare il concetto di spazio continuo in Platone, ipotesi a mio avviso molto coerente ed efficace, è quella proposta da Elisabetta Cattanei. La studiosa parte dall'osservare che, a detta di Aristotele, Platone negava l'esistenza dei punti *contenuti nelle linee*, e dunque solo di questi, non dei punti in generale. Questo perché Platone concepisce

Tutti gli enti matematici, anche quelli più complessi, come realtà intelleggibili, e quindi come entità indivisibili, o comunque non scomponibili così come un aggregato viene scomposto nelle sue parti<sup>101</sup>.

99 PLATONE, *Menone*, 76 a.

100 A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., p. 782.

101 E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., pp. 216, 217.

La linea non sarebbe una sommatoria di punti, ma un ente matematico diverso, non riducibile al punto, e collocato ad un altro livello della gerarchia ontologica. Questa sarebbe intesa da Platone come una gerarchia per gradi di semplicità, nella quale l'ente matematico più semplice è ontologicamente anteriore al più complesso. Il punto sarebbe pertanto *principio* della linea, e sua condizione di pensabilità, e in nessun caso potrebbe invece essere inteso come suo costitutivo.

Il punto sarebbe l'analogo, sul piano degli enti geometrici, dell'unità aritmetica posta a principio dei numeri matematici. Così come quest'ultima è principio del numero, ma non è numero essa stessa, il punto è principio degli enti geometrici, ma non è ente geometrico esso stesso<sup>102</sup>.

## **5. La concezione aristotelica dello spazio.**

Meno controversa di quella platonica, ma altrettanto interessante, è la concezione che dello spazio ebbe Aristotele, il quale, a differenza di Platone, elaborò la problematica in modo esplicito. Va premesso che Aristotele ha su Platone una generazione di vantaggio, e che quindi scrive in un contesto in cui alcune riflessioni erano state portate ad un più elevato livello di maturazione. Emblematico, per le tematiche che stiamo trattando, è il caso delle grandezze incommensurabili. La loro esistenza, che per Platone costituiva un qualcosa di ancora parzialmente problematico, era invece per Aristotele perfettamente assodata.

### ***L'infinito per divisione.***

In Aristotele, a differenza che in Platone, lo spazio viene pensato come un continuo in modo consapevole ed esplicito; la cosa inoltre non sembra presentare alcuna difficoltà, viene anzi data per assodata. Le grandezze geometriche sono sempre per la loro stessa natura divisibili, in un processo che può potenzialmente proseguire all'infinito, dal momento che non vi è un limite in cui esso è costretto ad arrestarsi. Tuttavia,

102 Ivi, p. 217.

È vero che il processo di divisione della linea non si arresta, ma il pensiero non può pensare la linea senza fermarsi nel processo di divisione. Quindi non potrà mai contare le divisioni della linea colui che procede all'infinito nel processo di divisione<sup>103</sup>.

Dunque, si può proseguire nella divisione quante volte si desidera, ma non *infinite* volte: perché la grandezza sia pensabile, occorre che il processo di divisione giunga ad un termine ben definito. Aristotele, da uomo greco, si trova in difficoltà a gestire il concetto di infinito, che può esistere come infinito *per divisione*, ma solamente *in potenza*: una grandezza infinita *in atto* è per lui assolutamente impensabile<sup>104</sup>. Le grandezze, così pensate, sono dunque continue:

A chi definisce il continuo capita spesso di servirsi del concetto di infinito, perché è continuo ciò che è divisibile all'infinito<sup>105</sup>.

Si noti che, in Aristotele, la continuità è una proprietà tanto dello spazio geometrico che di quello fisico, senza che vi sia una precisa distinzione tra i due. Analogamente, continui sono il movimento ed il tempo. Il filosofo, a partire da questa formulazione del binomio spazio-tempo, si occupò anche dei paradossi di Zenone, mostrandone l'infondatezza. In particolare, a proposito del paradosso della freccia, egli osservò:

La freccia, nell'atto in cui è spostata, sta ferma. Ma questa conclusione si ottiene solo se si considera il tempo come composto da istanti; se questo non si ammette, non ci sarà sillogismo<sup>106</sup>.

Dunque, ricondusse l'origine dell'aporia ad un'errata concezione dello spazio-tempo, che non può essere pensato come composto di indivisibili separati tra loro, ma dev'essere concepito come un continuo; pena, appunto, l'impossibilità del moto. Per quanto riguarda i paradossi della dicotomia e dell'Achille, egli scrisse:

Il ragionamento di Zenone erroneamente presuppone l'impossibilità che si possano percorrere gli infiniti o che possano toccarsi ciascuno successivamente in un tempo finito. Difatti, tanto la grandezza quanto il tempo e, in generale, ogni cosa continua si dicono infiniti in due sensi, cioè o per divisione o per gli estremi. Pertanto, gli infiniti

103 ARISTOTELE, *Metafisica*, α 2, 994 b 23-25.

104 Cfr. ARISTOTELE, *Fisica*, III, 206 a-b.

105 Ivi, III, 200 b.

106 Ivi, VI, 239 b.

che sono tali secondo la quantità, non possono toccarsi in un tempo finito; quelli, invece, che sono tali secondo divisione, lo possono, perché il tempo stesso è infinito sotto questo aspetto<sup>107</sup>.

Vediamo qui l'importanza di distinguere tra l'infinito in potenza e l'infinito in atto: Zenone ha infatti ragione nell'osservare che sarebbe impossibile percorrere uno spazio attualmente infinito in un tempo finito, ma un tale spazio non si dà mai in atto. Quello che è presupposto dai paradossi è un infinito per divisione, ed esiste solo in potenza. Tuttavia, anche il tempo, che pure è un continuo, è infinito in potenza; quindi – per Aristotele – l'aporia viene meno, poiché non c'è nulla di contraddittorio nel pensare che uno spazio, infinito solo in potenza, possa essere percorso per intero in un tempo anch'esso infinito allo stesso modo.

### ***Il punto e la retta.***

Si ritrova anche in Aristotele la difficoltà, già segnalata in altri pensatori, a definire il punto e il suo legame con la retta. Innanzitutto si riscontra che, anche in questo autore, il punto necessita di essere definito a partire da enti geometrici dimensionati. Nella *Metafisica* leggiamo:

I punti sono limiti delle grandezze<sup>108</sup>.

I punti vengono pensati da Aristotele, oltre che come *inestesi*, anche come indivisibili, a differenza di quelli pitagorici che erano divisibili ancorché inestesi. Tuttavia, il fatto che essi siano indivisibili rende problematico pensare alla retta come ad un accumulo di questi punti, poiché:

È impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. [...] Il continuo sarebbe divisibile in indivisibili [...]; ma in realtà nessun continuo è divisibile in cose prive di parti. [...] Ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili<sup>109</sup>.

107 Ivi, VI, 233 a.

108 ARISTOTELE, *Metafisica*, N 5, 1092 b 9-10.

109 ARISTOTELE, *Fisica*, VI, 231a-b.

Accostando un certo numero di indivisibili, si ottiene sempre di necessità un discreto. Un punto può essere l'estremità di una linea, oppure trovarsi al suo interno, tuttavia non è possibile che la linea sia una sommatoria di punti, pena la perdita della sua continuità. Questa difficoltà è risolta pensando i punti come presenti nella linea solamente *in potenza*, allo stesso modo in cui una statua di Ermete può trovarsi in un blocco di marmo<sup>110</sup>:

Se nella pietra non è presente un Ermete, neppure un semicubo sarà presente nel cubo come qualcosa di determinato. Dunque, non sarà presente neppure la superficie: se, infatti, fosse presente una qualsiasi superficie, ci sarebbe anche quella che delimita la metà del cubo. Lo stesso ragionamento vale anche per la linea, per il punto e per l'unità<sup>111</sup>.

Il punto, dunque, è per la linea il principio, il costitutivo primo immanente; tuttavia i due enti geometrici sono essenzialmente irriducibili l'uno all'altro<sup>112</sup>.

### ***Le definizioni di “continuo”.***

L'irriducibilità della retta al punto trova la sua esplicita giustificazione nelle definizioni che Aristotele dà del continuo. Abbiamo diverse definizioni, che confermano quanto finora già osservato. Ad esempio, egli scrive:

Non c'è alcun continuo che sia privo di parti<sup>113</sup>.

Qui si riconferma la caratteristica del continuo di essere sempre potenzialmente divisibile. In un altro punto della *Metafisica*, leggiamo:

Continue sono per sé quelle cose che non sono una unità per puro contatto: se, infatti, si pongono dei pezzi di legno in contatto fra di loro, non si può dire che essi costituiscono un solo legno, né un solo corpo, né alcun altro tipo di continuo<sup>114</sup>.

110 Cfr. E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., pp. 43-45.

111 ARISTOTELE, *Metafisica*, B 5, 1002 a 21-25.

112 Cfr. E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 44.

113 ARISTOTELE, *Fisica*, VI, 233 b 30-31.

114 ARISTOTELE, *Metafisica*, Δ 6, 1016a 7-9.

Intuitivamente capiamo che perché un corpo sia continuo, esso non dev'essere scomponibile in parti che siano ben definite e distinte tra loro, ma dev'essere un tutt'uno, potremmo dire che esso dev'essere “uniforme”: dal discreto il continuo non si può originare. Tale questione è approfondita nella *Fisica*, dove Aristotele definisce il continuo anche attraverso un confronto con alcuni concetti prossimi a questo: l'*essere in contatto*, il *consecutivo* e il *contiguo*.

Si dicono in contatto quelle cose le cui estremità coincidono.

[...]

Il consecutivo [...] è ciò che non presenta alcun intermedio dello stesso genere tra se stesso e quello di cui è consecutivo.

[...]

Contiguo è ciò che oltre a essere consecutivo è anche in contatto.

[...]

Il continuo è una determinazione particolare del contiguo, ed io dico che c'è continuità quando i limiti di due cose, mediante i quali l'una e l'altra si toccano, diventano uno solo e medesimo e, come dice la parola stessa, si tengono insieme. Questo, però, non può verificarsi quando gli estremi sono due. Tenendo conto di questa precisazione, risulta chiaro che il continuo è in quelle cose da cui per natura vien fuori qualcosa di unico in virtù del contatto<sup>115</sup>.

Si chiarisce quindi il concetto di *essere in contatto*, presente anche nel brano precedente. Se la linea fosse composta di punti, essi sarebbero semplicemente in contatto tra loro, vale a dire che l'estremità di uno toccherebbe l'estremità del successivo, tuttavia rimarrebbe sempre possibile distinguere un punto dall'altro<sup>116</sup>.

115 ARISTOTELE, *Fisica*, V, 227 a-b.

116 Cfr. E. BERTI, *Guida ad Aristotele*, Laterza, Roma Bari 2000, p. 135.

## CAPITOLO 4. LE DEFINIZIONI DEL PRIMO LIBRO DEGLI *ELEMENTI*

### 1. Gli *Elementi* di Euclide.

Gli *Elementi* di Euclide, databili con buona precisione attorno al 300 a. C., rappresentano una sistematizzazione e una sintesi del precedente sapere matematico, elaborato nel corso di tre secoli in seno alla civiltà greca. La grandezza dell'opera è evidente se si considera che, per il suo rigore e la sua completezza, essa dovette rendere sostanzialmente inutili tutte le precedenti raccolte di *Elementi*, dal momento che nessuna di queste, che pure dovettero essere redatte, è arrivata fino a noi.

L'opera di Euclide mostra un volto compatto, marmoreo, tuttavia, se letta con i giusti strumenti e con la giusta attenzione, essa rivela una ricchezza incredibile. È come se la magmatica storia dell'aritmetica e della geometria si solidificasse in quest'opera, permettendoci di leggere tutte le ragioni filosofiche e i ripensamenti che stanno alla radice dei concetti cardine di queste due discipline. Pertanto, ritengo che meriti uno spazio a sé stante un breve esame delle definizioni contenute nel primo Libro, le quali possono, se opportunamente interrogate, aiutarci a raccogliere e a capire più profondamente quanto si è fin qui visto.

Gli *Elementi* sono strutturati in tredici Libri, nei quali gli argomenti sono così ripartiti:

Libro 1: l'uguaglianza e l'equivalenza tra poligoni;

Libro 2: l'algebra geometrica;

Libro 3: il cerchio e le sue proprietà;

Libro 4: i poligoni regolari;

Libro 5: la teoria eudossiana delle proporzioni;

Libro 6: le proporzioni applicate alla geometria piana;

Libri 7, 8, 9: i numeri interi e le loro proprietà;

Libro 10: le grandezze irrazionali;

Libri 11, 12, 13: la geometria solida.



In particolare, le definizioni contenute in apertura al primo Libro hanno la funzione di introdurre ai concetti cardine della geometria. È interessante notare l'ordine con cui Euclide ci presenta gli argomenti. Nel momento in cui l'uomo si era trovato a dover per la prima volta sviscerare certi argomenti, egli dovette necessariamente essere partito da teoremi più complessi, per poi ricostruire i teoremi più elementari che questi presupponevano: teoremi che, per la loro evidenza, dovevano in un primo momento essere stati dati per scontati. Dunque, l'ordine “genetico” degli argomenti dovrebbe essere quello che va dal più complesso al più semplice, e lo stesso vale per gli enti che sono oggetto di quei teoremi: è senz'altro più semplice afferrare concettualmente un corpo solido che un ente a dimensione zero come il punto, dal momento che possediamo il concetto del secondo grazie ad un processo di astrazione dal primo. L'ordine che rispecchia la genesi dei concetti è anche il più congeniale per chi deve apprendere: didatticamente, infatti, partire dai concetti più primitivi risulta meno efficace che partire da concetti più complessi, ma più facili da afferrare e a noi più familiari<sup>117</sup>.

Euclide, invece, opera la scelta inversa: egli segue un ordine puramente logico, partendo dai concetti e dai teoremi assolutamente più semplici e primitivi, per dedurre da questi proposizioni sempre più complesse. Tutto ciò che viene enunciato negli *Elementi* deve necessariamente trovare, nelle parti già esposte dell'opera, tutte le premesse di cui necessita. Tale ordine logico potrebbe forse venir letto anche come un ordine *ontologico*, se ci si riallaccia all'ipotesi per cui, in Platone, i diversi enti matematici, a seconda del numero delle loro dimensioni, apparterrebbero a livelli ontologici diversi, il più elevato dei quali corrisponderebbe agli enti più semplici, e dunque, in questo caso, ai punti.

Questo parallelismo con Platone ha un suo fondamento, dal momento che negli *Elementi* si trovano numerosi indizi, che farebbero ipotizzare che Euclide avesse sposato alcune posizioni platoniche. Scrive Proclo:

Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che egli si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli *Elementi* la costruzione delle figure chiamate platoniche<sup>118</sup>.

117 Cfr. H. G. ZEUTHEN, *Sur les définitions d'Euclide*, cit., pp. 257-258.

118 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 78.

Se è forse esagerato ritenere che Euclide avesse come scopo finale la costruzione dei cinque poliedri regolari (costitutivi dell'universo secondo Platone), è senz'altro vero che alcuni degli atteggiamenti di Euclide inducono a pensare ad un influsso del platonismo nella composizione degli *Elementi*.

Sappiamo che Platone considerava gli enti matematici alla stregua delle idee, dunque come aventi realtà propria, indipendentemente dall'esperienza, e come irriducibili ai loro corrispettivi di questo mondo, con i quali si opera per esigenze pratiche. I veri enti matematici, pertanto, dovevano essere oggetto soltanto di pura contemplazione: non era possibile operare su di essi, eseguire costruzioni, calcoli, trasformazioni<sup>119</sup>.

Forse è proprio da questa indicazione platonica che deriva l'atmosfera puramente razionale, quasi asettica, nella quale opera Euclide. Come si vedrà nel dettaglio più avanti, gli enti matematici descritti da Euclide sono puramente astratti, svincolati da qualsiasi legame con lo spazio fisico e la materia, e appartenenti esclusivamente al dominio della ragione. Troviamo evidenza di ciò, tra l'altro, nel fatto che Euclide non fornisce mai, in tutto il corso dell'opera, alcuna regola di misurazione: si tratta di un segnale del fatto che la misura non è compito del matematico, al quale non interessa la dimensione dell'oggetto studiato, quanto le sue proprietà pure<sup>120</sup>. Thomas Heath rileva, inoltre, la diffidenza di Euclide nei confronti della dimostrazione di congruenza attraverso sovrapposizione, dal momento che questa implicava che fosse possibile traslare una figura senza deformarla<sup>121</sup>. Anche questa presa di posizione contro un metodo “meccanico” di condurre le dimostrazioni potrebbe essere letta come un segno dell'influsso platonico.

Un ulteriore indizio di un atteggiamento platonico in Euclide si potrebbe vedere proprio in una caratteristica delle sue definizioni. Come si è visto, egli pretenderebbe di definire gli enti matematici più elementari e primitivi, il che è chiaramente problematico.

119 Esistono alcune testimonianze che attribuirebbero a Platone la divisione degli enti matematici (sia geometrici che aritmetici) in due categorie: gli enti matematici *puri* sarebbero appunto oggetto di sola contemplazione, mentre gli enti matematici *intermedi* sarebbero utilizzabili per eseguire calcoli ed operazioni. Esiste una sola idea di 2, perciò è chiaro che, se voglio eseguire l'operazione  $2 + 2$ , non posso eseguirla sull'idea stessa, e tuttavia la eseguo su un qualcosa di astratto, puramente razionale. Gli enti matematici intermedi sarebbero appunto quelli che permetterebbero di operare a livello scientifico (e non empirico) sulle realtà matematiche, essendo perfetti e puramente razionali come le idee, ma molteplici come le cose sensibili. Su tale questione si ritornerà più abbondantemente nel corso dell'ultimo capitolo.

120 Cfr. A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, cit., p. 74.

121 Cfr. T. HEATH, *A history of Greek mathematics*, Dover Publications, New York 1981, p. 376.

Osservando il modo in cui le definizioni sono formulate, infatti, ci accorgiamo che esse non sono mai propriamente delle definizioni come noi le intendiamo, quanto piuttosto delle formule che permettono di individuare un oggetto già noto. Definire, dunque, per Euclide non significa costruire un oggetto nel nostro pensiero a partire da concetti più elementari, quanto piuttosto indicare o descrivere un qualcosa che esiste già, indipendentemente da noi. Proprio questo presupporre gli enti matematici come indipendenti dalla mente di chi li studia potrebbe essere letto come un indizio di una concezione platonica dell'ente matematico<sup>122</sup>.

Infine, merita qui di essere messo a fuoco lo scrupolo con il quale Euclide si serve, in tutta la sua opera, di due soli enti geometrici, il cerchio e la retta: tutte le costruzioni che figurano nei tredici Libri sono riconducibili a queste due linee. Tale scelta può essere collegata al fatto che nel mondo greco i problemi di geometria dovevano essere risolti con l'utilizzo solamente della riga e del "compasso"<sup>123</sup>.

Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni soltanto riga e compasso. La linea retta e il cerchio erano, secondo i greci, le figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici. Le costruzioni effettuate con questi strumenti erano perciò preferibili. È stata avanzata come spiegazione anche l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee, che egli considerava primario<sup>124</sup>.

Dunque, nella scelta di Euclide di tracciare solamente rette e cerchi si può vedere il rispetto di questo divieto platonico. Anche nel caso si rifiutasse di attribuire a Platone questa indicazione, è comunque notevole che Euclide, in tutta l'opera, non nomini mai, nemmeno una volta, strumenti di questo genere. Inoltre, nel primo Libro Euclide si preoccupa di fornirci il procedimento per tracciare un segmento di lunghezza data con un estremo in un certo punto. Questo chiaramente significa che, senza effettuare tutte le costruzioni indicate, il trasporto del segmento non sarebbe possibile. È stato detto a tal proposito che Euclide utilizza una sorta di compasso immaginario, tale che esso si richiude non appena le sue punte vengono sollevate entrambe dal foglio. È difficile non scorgere,

122 Cfr. A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, cit., p. 78-79.

123 L'uso del termine "compasso" è in questo caso improprio, poiché tale strumento non era ancora utilizzato in epoca greca. Esistevano, tuttavia, altri strumenti che assolvevano alla stessa funzione.

124 M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, cit., pp. 48-49.

dietro a tutti questi accorgimenti, la volontà di non contaminare mai le pure costruzioni geometriche con la materia di strumenti meccanici, ma di mantenersi, al contrario, sempre su un piano perfettamente astratto e razionale.

## **2. Le definizioni di punto.**

Gli *Elementi* si aprono con queste parole:

Punto è ciò che non ha parti<sup>125</sup>.

Dunque, in apertura all'intera opera, Euclide sceglie di presentare quello che già in epoca pitagorica era considerato il principio di tutta la realtà geometrica: il punto; e lo fa con una definizione che, per la sua complessità e per la sua attinenza con quello che è il mio percorso di ricerca, credo meriti una trattazione a sé.

Tradizionalmente, questa definizione è sempre stata letta come un'affermazione dell'inestensione del punto. Dopo la scoperta dell'incommensurabilità, il punto, divenuto un ente di ragione, andava pensato come privo di dimensioni, e quindi come non avente parti. Euclide, che si stava proponendo di compendiare tutto il sapere matematico a lui precedente, avrebbe dunque inserito in principio della sua trattazione proprio questa definizione, sancendo definitivamente il distacco dalla geometria discreta dei Pitagorici, i quali non avevano ancora pienamente portato a termine il processo di astrazione dell'ente matematico.

Questa lettura, senz'altro corretta, non è tuttavia sufficiente a rendere conto di alcune cose. Balza immediatamente all'occhio che questa definizione ricalca perfettamente la definizione tradizionale dei Pitagorici, i quali, com'è noto, pensavano il punto come esteso e tuttavia come non avente parti. Non vi è infatti alcuna contraddizione tra i due attributi, dal momento che l'indivisibilità non implica né l'estensione né l'inestensione dell'ente cui si riferisce. Inoltre, la definizione Euclidea è in tutto e per tutto simile alla definizione tradizionale di unità, la quale ritorna anche in autori come Platone ed Aristotele:

125 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 1.

Il veramente Uno deve essere del tutto privo di parti<sup>126</sup>.

Come si ricorderà, il punto era concettualmente sovrapponibile all'unità, dal momento che si trattava di un ente geometrico a dimensione *uno*. Dunque, le parole scelte da Euclide sembrano suggerire che ci si riferisca più al punto esteso dei Pitagorici che al punto inesteso.

Esistono, tuttavia, all'interno degli *Elementi* una serie di indizi che ci portano ad asserire inequivocabilmente che il punto, così come viene utilizzato in quest'opera, sia il punto inesteso. Il più evidente di questi indizi è la terza definizione:

Estremi di una linea sono punti<sup>127</sup>.

Questa definizione ricalca fedelmente il passo già incontrato, in cui si attribuisce a Platone la definizione del punto come limite della retta. Come si è visto, definire il punto a partire dalla retta è uno stratagemma per indicare un ente a dimensione *zero*, difficile da cogliere altrimenti. Altre definizioni, come quella che recita:

Linea è lunghezza senza larghezza<sup>128</sup>.

sono tutti segnali del fatto che il punto con cui si opera è perfettamente inesteso. Va infine osservato che il termine utilizzato da Euclide è σημείον, sintomatico di un distacco dalla materialità del punto. La prima definizione degli elementi, pertanto, dev'essere considerata perlomeno problematica.

Ciò che senz'altro Euclide ha voluto dirci con queste parole è che il punto è il costitutivo della materia geometrica, il suo principio, l'ente più semplice e per questo primo. Proprio per questa sua caratteristica, esso è però impossibile da definire, e può essere colto solo per via negativa: la definizione infatti ci dice solo ciò che il punto non è, e non ci dice ciò che il punto è<sup>129</sup>.

126 PLATONE, *Sofista*, 245 a.

127 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 3.

128 Ivi, I, def. 2.

129 Cfr. M. TIMPANARO CARDINI, introduzione a PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, cit., p. 15.

Osserva Proclo che il punto riveste nei confronti degli altri enti geometrici il ruolo di fattore limitante (esso è definito anche come limite della linea), e pertanto prevale sostanzialmente su di essi:

Nell'intelletto e negli ordinamenti intermedi attinenti all'anima, e nelle stesse nature che vivificano in modo immediato i corpi, i fattori limitanti prevalgono sostanzialmente sulle cose limitate, essendo più indivisibili, più uniformi e più antichi. Perché nelle forme immateriali l'unità è più perfetta della pluralità e l'indivisibile più perfetto di ciò che va disperdendosi in tutti i sensi, e il limite rispetto a ciò che riceve il limite da altro<sup>130</sup>.

Egli rileva inoltre che le proposizioni negative sono sintomatiche del fatto che esse definiscono un ente avente valore di principio. La definizione della retta come lunghezza senza profondità, ad esempio, si compone di una parte affermativa e di una negativa. La parte affermativa indica che la retta non è prima, ma deriva dal punto; la parte negativa indica invece che essa ha funzione di principio rispetto a superfici e volumi. È pertanto evidente che il punto, il quale non dipende da altro fuori di sé, necessiterà di essere definito solamente per via negativa.

Dunque, evidentemente, con la prima definizione Euclide ha voluto presentare il principio della realtà geometrica della quale sarebbe andato a parlare, senza tuttavia fornire informazioni circa la sua estensione o inestensione. Questa definizione si presenta quindi come densa e al contempo ambigua, e suona fortemente come una sorta di omaggio alla tradizione pitagorica. Ipotizza Attilio Frajese che essa fosse volutamente di carattere storico, e che il suo ruolo fosse proprio quello di lasciare una traccia del pitagorismo, di mantenere la memoria della prima fase della geometria greca, anteriore alla concezione razionale degli enti matematici<sup>131</sup>.

130 PROCLIO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 86.

131 Cfr. A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, cit., p. 81.

### 3. Altre definizioni notevoli.

Il Libro primo contiene ventitré definizioni, ne presenterò qui di seguito una selezione, ritenuta particolarmente significativa. Un primo gruppo di definizioni è quello relativo a rette e superfici.

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 2 | Linea è lunghezza senza larghezza <sup>132</sup> .                                   | 5 | Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza <sup>133</sup> .                     |
| 3 | Estremi di una linea sono punti <sup>134</sup> .                                     | 6 | Estremi di una superficie sono linee <sup>135</sup> .                                       |
| 4 | Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa <sup>136</sup> . | 7 | Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa <sup>137</sup> . |

Si nota immediatamente che vi è una perfetta simmetria tra le definizioni 2, 3 e 4, relative alla retta, e le definizioni 5, 6 e 7 relative alla superficie.

Per quanto riguarda la coppia 2-5, si può osservare innanzitutto che gli enti geometrici trattati sono perfettamente idealizzati: la linea non ha larghezza e la superficie non ha spessore, esse dunque sono analoghe al punto inesteso, e appartengono al puro pensiero. Come già si è anticipato nel precedente paragrafo, Proclo, relativamente a queste due definizioni, osserva che esse si compongono di una parte affermativa e di una negativa (nella 5 è sottinteso “senza profondità”). La presenza di una parte affermativa indica che queste realtà geometriche dipendono da realtà più semplici, ossia dal punto la prima, dalla linea la seconda. La parte negativa, invece, è sintomatica del fatto che esse svolgono a loro volta funzione di principio, rispettivamente della superficie e del solido. Dunque, in queste definizioni si potrebbe leggere la volontà di Euclide di creare una gerarchia degli enti matematici, tale che il più semplice ha primato sia logico che ontologico, ed ha funzione di principio nei confronti delle realtà più complesse.

132 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 2.

133 Ivi, I, def. 5.

134 Ivi, I, def. 3.

135 Ivi, I, def. 6.

136 Ivi, I, def. 4.

137 Ivi, I, def. 7.

La coppia 3-6 ricalca alcune definizioni ormai note: quella contenuta nel *Menone*, in cui la figura è definita come limite del solido, e quella riportata da Aristotele, il quale attribuisce a Platone la definizione di punto come limite della linea. Nella *Metafisica*, poi, leggiamo:

il punto è il limite e l'estremità della linea, la linea è limite ed estremità della superficie e la superficie è limite ed estremità del solido<sup>138</sup>.

All'interno degli stessi *Elementi*, infine, si ritrova una definizione analoga:

Limite di un solido è la superficie<sup>139</sup>.

Due cose emergono da queste definizioni: il fatto che in esse si conferma la pura idealità degli enti matematici e l'inestensione del punto, e il fatto che linee, superfici e solidi fossero pensati da Euclide come *limitati*. Ho già spiegato come nel mondo greco vi fosse una certa difficoltà a pensare l'infinito, che per la sua indeterminatezza rifiutava di farsi ingabbiare e dominare nel pensiero. Con ciò è perfettamente coerente il fatto che Euclide non pensi la retta come infinita (come invece la pensiamo noi), bensì come terminata. Quella che Euclide chiama retta, noi chiameremmo segmento: ha un inizio ed una fine, è prolungabile a piacere, finché ve ne sia bisogno, ma non all'infinito. Analogamente, una superficie è sempre delimitata da rette, ed un volume da superfici: solo così essi sono pensabili. Si trova una conferma di questo modo di intendere gli enti geometrici nella definizione 14:

Figura è ciò che è compreso da uno o più termini<sup>140</sup>.

Infine, la coppia 4-7 ci fornisce le definizioni di linea retta e di superficie piana. Si tratta di due definizioni di difficile interpretazione. Frajese suggerisce che Euclide stia dicendo che non vi sono sulla retta punti "privilegiati", come nel piano non vi sono rette "privilegiate"<sup>141</sup>. Proclo suggerisce invece di leggere la definizione in questi termini:

138 ARISTOTELE, *Metafisica*, N 3, 1090 b 6-7.

139 EUCLIDE, *Elementi*, XI, def. 2.

140 Ivi, I, def. 14.

141 Cfr. A. FRAJESE, nota 4, p. 66 in EUCLIDE, *Elementi*, cit.



La retta è la sola che occupa una distanza pari alla distanza che esiste tra i punti che sono su di essa<sup>142</sup>.

Dunque, dati due punti essi avranno una certa *distanza* (per *distanza* in geometria si intende la distanza minima): la linea che congiunge i due punti ed è lunga esattamente quanto la distanza tra i due punti, è una linea retta.

Il secondo gruppo di definizioni di cui mi interessa parlare è quello relativo agli angoli, in particolare riporto le definizioni 8 e 9.

Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciono in linea retta<sup>143</sup>.

Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo<sup>144</sup>.

Da queste definizioni emerge che Euclide chiamava angoli non solo quelli che noi oggi consideriamo tali, ma anche porzioni di piano delimitate da linee non rette, come ad esempio quella delimitata da una circonferenza e una retta o da due circonferenze. Per questa ragione è necessaria la definizione 9, la quale distingue gli angoli rettilinei da tutti gli altri.

Il fatto che anche l'intersezione di linee non rette fosse chiamato angolo è un segnale del fatto che questa parola non indicava una porzione infinita di piano (com'è invece per noi), bensì solo la parte di piano immediatamente adiacente al punto di intersezione delle linee. Se così non fosse, infatti, sarebbe ben difficile dare il nome di angolo, ad esempio, alla figura che si genera dall'intersezione di una circonferenza con una sua tangente. Anche in questo modo di pensare l'angolo troviamo una conferma del fatto che l'infinito *in atto* era stato bandito dalla geometria greca, e che negli *Elementi* si aveva a che fare solamente con enti matematici limitati, afferrabili con il pensiero.

Frajese, inoltre, rileva che questa definizione è tautologica: infatti il concetto di angolo è spiegato attraverso quello, equivalente, di *inclinazione*. La definizione dunque non è quale la intendiamo noi; tuttavia, come ho già spiegato, negli *Elementi* le definizioni hanno solo funzione descrittiva, servono ad indicare una nozione già posseduta dal lettore,

142 PROCLIO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 109.

143 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 8.

144 Ivi, I, def. 9.

pertanto sostituire la parola *angolo* con *inclinazione*, più comune, permette di assolvere a questa funzione, identificando inequivocabilmente l'oggetto geometrico in questione<sup>145</sup>.

Interessanti ai fini di questo lavoro sono poi le definizioni relative alla circonferenza e al cerchio: ne presento tre.

Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadono sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali tra loro<sup>146</sup>.

Quel punto si chiama centro del cerchio<sup>147</sup>.

Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà<sup>148</sup>.

Nel mondo greco la circonferenza era una figura che godeva di particolare considerazione. Essa era infatti la più semplice e perfetta delle figure curvilinee, e, come si ricorderà, la geometria greca delle origini si era imposta di operare solamente con figure rettilinee e curvilinee (ossia con i loro corrispettivi fisici: riga e compasso). La circonferenza godeva inoltre di un primato tra le figure piane: essa infatti è compresa da una sola linea, e rivestiva pertanto un ruolo privilegiato in quella gerarchia di cui si è già più volte parlato, nella quale il primato logico ed ontologico spettava al più semplice<sup>149</sup>. Scrive Proclo:

Il cerchio è la primigenia e la più semplice delle figure [...]. Essa corrisponde al Limite, all'Unità e in generale alla serie delle cose migliori<sup>150</sup>.

Il filosofo ci fornisce anche una dimostrazione di quanto affermato nella definizione 17, ossia che il diametro taglia il cerchio a metà:

E se si vuol dimostrare il fatto per via matematica, immaginiamo condotto il diametro e sovrapposta una parte del cerchio all'altra; se non è uguale, essa cadrà o all'interno o

145 Cfr. A. FRAJESE, nota 5, p. 67 in EUCLIDE, *Elementi*, cit.

146 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 15.

147 Ivi, I, def. 16.

148 Ivi, I, def. 17.

149 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 151.

150 Ivi, par. 147.

all'esterno; e qual dei due sia il caso, seguirà che la retta più breve sarà uguale alla più lunga, poiché tutte le rette dal centro alla periferia sono eguali<sup>151</sup>.

Infine, vorrei presentare la ventiduesima definizione, la quale contiene una classificazione delle figure quadrilateri:

Delle figure quadrilateri, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilateri oltre a queste si chiamano trapezi<sup>152</sup>.

Si nota innanzitutto che i nomi utilizzati da Euclide non coincidono con quelli utilizzati da noi: egli utilizza romboide per indicare il nostro parallelogramma, e trapezio per indicare il quadrilatero generico. Ciò che tuttavia più mi preme evidenziare in questa sede è il fatto che il quadrato non è considerato come un particolare tipo di rettangolo, ma come una figura diversa, irriducibile al rettangolo. Sorge spontanea l'associazione di questa distinzione con la celebre lista dei contrari proposta dai Pitagorici, dove la decima coppia era appunto quadrato-rettangolo. Frajese vede in questa scelta un ulteriore richiamo, di carattere storico, alla prima matematica pitagorica<sup>153</sup>.

Si potrebbe poi formulare un'ulteriore ipotesi a proposito di questa definizione, per giustificare la quale occorre ritornare brevemente sul passo del *Teeteto* platonico esaminato al capitolo secondo. In questa sede, i numeri erano stati appunto divisi in “quadrati” e “rettangoli”, e si erano individuate due tipologie di grandezze lineari: quelle che, se utilizzate come lato di un quadrato, restituivano un'area esprimibile con un numero quadrato, e quelle che invece quadravano un'area esprimibile solo con un numero rettangolo. Le prime grandezze risultavano essere tutte razionali, le seconde irrazionali. Tra le due tipologie di grandezze esisteva dunque una distanza incolmabile, esse erano essenzialmente irriducibili le une alle altre. La scelta di Euclide, dunque, potrebbe essere motivata dalla presa di coscienza che i valori quadrati e quelli rettangoli erano diversi nella loro più intima natura, in quanto davano origine a realtà comunicanti tra loro, ovvero *incommensurabili*.

151 Ivi, par. 157.

152 EUCLIDE, *Elementi*, I, def. 22.

153 Cfr. A. FRAJESE, nota 7, p. 70 in EUCLIDE, *Elementi*, cit.

**PARTE SECONDA**  
**L'UNITÀ E IL NUMERO**

## CAPITOLO 5. CONTINUO E DISCRETO, GEOMETRIA E ARITMETICA

### 1. Il punto e l'unità.

Nella prima parte della mia ricerca ho cercato di mostrare come, a seguito della scoperta dell'incommensurabilità, i matematici greci si fossero trovati a dover riformulare i concetti cardine della geometria, la quale doveva appunto ospitare al suo interno l'irrazionale, e pertanto doveva essere necessariamente pensata secondo il paradigma della continuità. Mi propongo ora, in questa seconda parte, di portare l'attenzione sul versante dell'aritmetica e di esaminare i concetti di numero e di unità, evidenziando in particolare se, e in che modo, le scoperte effettuate in ambito geometrico abbiano avuto ripercussioni anche in ambito aritmetico, e come il legame tra aritmetica e geometria si sia evoluto a seguito della scoperta dell'irrazionalità. In particolare mi occuperò, negli ultimi tre capitoli, di sviscerare le posizioni di tre pensatori particolarmente significativi, posteriori alla scoperta dell'incommensurabilità: Aristotele, Euclide e Platone<sup>154</sup>. Nel capitolo presente mi propongo invece di mettere in luce alcune questioni relative al concetto di numero e al suo rapporto con quello di grandezza.

Come si è visto, i Pitagorici intendevano l'aritmetica e la geometria come due facce della stessa medaglia, pertanto le realtà geometriche dovevano sempre avere un corrispettivo aritmetico, e viceversa. Se queste due realtà erano così strettamente connesse, anche gli enti matematici che ne erano principio dovevano essere pensati in analogia l'uno con l'altro. Il punto era infatti perfettamente sovrapponibile all'unità: entrambi questi enti erano caratterizzati dal *non avere parti* e dall'aver valore *uno*.

154 L'ordine in cui i tre autori verranno presentati non è, volutamente, quello cronologico. Ho scelto di presentare prima la posizione Aristotelica poiché essa è lineare, coerente, ed è formulata negli scritti in modo esplicito; inoltre essa contiene spunti di carattere filosofico che permettono di vedere sotto una diversa prospettiva gli altri due autori. La scelta di trattare Platone alla fine è dovuta principalmente al fatto che, forse proprio per la sua anteriorità cronologica, la sua concezione di numero è più problematica e ambigua, e, a mio avviso, essa risulta più facilmente leggibile se raffrontata con le altre posizioni.

La scoperta dell'incommensurabilità aveva tuttavia imposto un ripensamento del punto, il quale era di necessità divenuto inesteso, infinitesimale: pertanto, da ente geometrico a dimensione *uno*, esso era divenuto un ente a dimensione *zero*. La corrispondenza con l'unità, dunque, perdeva il fondamento sul quale si era sempre poggiata. D'altra parte, la stessa corrispondenza tra la realtà geometrica e quella aritmetica veniva posta in crisi: come si è visto, infatti, era stata dimostrata l'esistenza di coppie di grandezze il cui λόγος non era esprimibile come rapporto tra due numeri naturali del tipo  $\frac{n}{m}$ . Era dunque evidente che queste realtà geometriche, che pure inconfutabilmente *esistevano*, non trovavano alcun corrispettivo nell'aritmetica pitagorica, la quale era, si ricorderà, aritmetica dei numeri interi. Vi erano delle proporzioni che potevano legittimamente sussistere nell'universo geometrico, senza che questo generasse difficoltà o paradossi, ma che nell'universo aritmetico divenivano prive di significato.

Il sistema pitagorico, dunque, conteneva al suo interno un'insanabile contraddizione: si trattava di un nodo che sarebbe presto o tardi dovuto venire al pettine, nel momento in cui ci si fosse seriamente confrontati con le conseguenze che la scoperta dell'incommensurabilità portava con sé. Per risolvere questa contraddizione vi sono sostanzialmente due vie percorribili.

La prima possibilità consiste nel separare la geometria dall'aritmetica, e dunque nel prendere atto che non tutto ciò che esiste nell'una ha il suo corrispettivo nell'altra. In tal caso, la prima diverrebbe senza alcun problema il regno del continuo e dell'irrazionale, mentre la seconda resterebbe essenzialmente discreta. Si potrebbe tranquillamente parlare di *grandezze irrazionali*, senza con ciò ammettere anche l'esistenza di *numeri irrazionali*.

La seconda possibilità, invece, consiste nel riformulare il concetto di numero: l'unità dev'essere pensata anch'essa come divisibile. Essa deve dunque essere fatta corrispondere non al punto, bensì ad un segmento di lunghezza *uno*, per sua natura sempre ulteriormente frazionabile. In tal caso, il termine *numero* potrebbe riferirsi anche a tutte quelle quantità non riconducibili a numeri interi, ossia anche a quelli che noi chiamiamo *numeri frazionari* e *numeri irrazionali*. La “linea dei numeri” così pensata, dunque, sarebbe *densa*, *continua*, e

pertanto essa potrebbe senza alcun problema trovare un corrispettivo nella retta geometrica<sup>155</sup>.

## 2. Il numero.

### *La genesi del concetto di numero.*

Questa seconda via, tuttavia, non venne sostanzialmente mai percorsa dai matematici greci, i quali non riuscirono perlopiù ad andare oltre al concetto di numero come numero intero. Le ragioni che stanno alla base di queste difficoltà sono molteplici, ritengo tuttavia che possa essere significativo, a tal proposito, esaminare in che modo l'uomo abbia iniziato ad utilizzare i numeri stessi. L'attribuzione del carattere dell'indivisibilità all'*uno* trova infatti una giustificazione proprio nell'origine del concetto di numero, origine che può essere fatta risalire ad un'epoca anteriore persino all'uso dei metalli e all'invenzione della ruota<sup>156</sup>.

Il contrasto tra un solo lupo e molti lupi, tra una pecora e un gregge, tra un albero e una foresta suggerisce che un lupo, una pecora e un albero hanno qualcosa in comune: la loro unicità. Nella stessa maniera si sarebbe osservato che certi altri gruppi, come le coppie, possono essere messi in corrispondenza biunivoca. Le mani possono essere appaiate con i piedi, con gli occhi, con le orecchie o con le narici. Questo riconoscimento di una proprietà astratta che certi gruppi hanno in comune e che chiamiamo numero rappresenta un grande passo verso la matematica moderna<sup>157</sup>.

Esistono dei reperti molto antichi che testimoniano la necessità dell'uomo di esprimere e ricordare delle quantità: sono state ritrovate, ad esempio alcune ossa, sulle quali erano state praticate delle incisioni ad intervalli regolari. La più antica di queste risale a circa trentacinquemila anni prima di Cristo<sup>158</sup>.

Il concetto di numero nasce quindi in relazione all'azione del contare, la quale, a sua volta, si riferisce sempre a gruppi di elementi. Contare significa associare secondo una relazione biunivoca gli elementi di un insieme di oggetti (pecore, alberi, ecc..) con gli

155 Cfr. A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., pp. 780-781.

156 Cfr. C. B. BOYER, *Storia della matematica*, cit., p. 3.

157 Ivi, p. 2.

158 Cfr. M. LIVIO, *La sezione aurea*, cit., p. 30.

elementi dell'insieme  $\{1; 2; 3; 4...\}$ . Il primo e più elementare metodo per contare, utilizzato istintivamente dai bambini, è quello di numerare utilizzando le dita<sup>159</sup>: ad un dito può essere fatto corrispondere un elemento dell'insieme, ed un'unità.

In molte lingue si possono trovare tracce di questo originario legame tra il numero e l'azione del contare, tra il mezzo attraverso cui si conta e gli stessi oggetti contati.

Per esempio, nelle isole Figi la parola usata per indicare «dieci noci di cocco» è «koro», quella usata per «dieci barche» è «bolo». In modo simile, tra i tauade della Nuova Guinea si usano parole diverse per intendere due uomini, due donne e due persone di sesso opposto. Persino nell'inglese moderno resta qualche traccia di questa *forma mentis*: si può dire «a yoke of oxen» (una coppia, letteralmente «un giogo» di buoi), ma nessuna persona normale direbbe «a yoke of dogs» (un giogo di cani)<sup>160</sup>.

È del tutto evidente che ai fini del contare occorrono numeri interi, composti da unità indivisibili le quali possono essere fatte corrispondere a degli oggetti in modo biunivoco. Gli oggetti contati sono sempre *discreti*, nettamente distinguibili l'uno dall'altro ed indivisibili (nel senso che è impossibile dividere un oggetto per ottenere due oggetti dello stesso tipo di quello di partenza: dividendo a metà un albero, ad esempio, non si ottengono due alberi). Per contare tali oggetti, dunque, servono delle unità che siano tutte uguali tra loro, ma nettamente distinte le une dalle altre, ossia, in altre parole, delle unità anch'esse *discrete*<sup>161</sup>. Va da sé che, in tale contesto, il “numero con la virgola” è privo di senso, e che per numero si intende solo quello che noi chiamiamo “numero naturale”.

### ***Il numero nel mondo greco.***

Nel mondo greco, tale concetto di numero come numero intero si consolida, diventando un cardine della matematica pitagorica. Troviamo svariate testimonianze del fatto che tale modo di concepire il numero fosse l'unico contemplato. Riporto, a tal proposito, un brano di Giamblico:

159 Cfr. L. L. CONANT, *The number concept*, cit., p. 8.

160 M. LIVIO, *La sezione aurea*, cit., p. 25.

161 Cfr. J. KLEIN, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, The MIT press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 1968 (orig. JACOB KLEIN, *Die griechische Logistik und die Entsehung der Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien*, Vol. 3, fasc. 1 (Berlino, 1934), pp. 18-105 (Part I); fasc. 2 (1936), pp. 122-235 (Part II).), p. 53.



Talete definì il quanto, cioè il numero, «sistema di unità» (secondo la dottrina degli Egizi, presso i quali anch'egli studiò) [...]. Pitagora invece lo definì come «estensione e attuazione dei principi seminali immanenti all'unità»[...]. Altri matematici dopo Pitagora hanno definito il numero «progressione di numeri a partire dall'uno e regressione all'uno». «Il numero è quantità determinata», dice il Pitagorico Eudosso, dopo averne distinto specie e genere<sup>162</sup>.

Il legame tra il numero e il gruppo numerato rimane molto forte, portando ad una vera e propria sovrapposizione tra i due. Osserva Bruno Centrone che il termine greco che designa il numero, ἀριθμός, indica non solo l'entità astratta mediante la quale si conta una pluralità di cose, ma anche (e soprattutto) la stessa pluralità di cose<sup>163</sup>. Va da sé che il numero non può esistere in modo indipendente, ma deve necessariamente essere numero di qualcosa: troviamo un'implicita ammissione di ciò anche in Platone e in Aristotele.

«[Un aritmetico perfetto] potrà mai contare da se stesso quelle realtà che esistono solo per lui o qualche realtà esterna che ha un numero?»

«Come no?»

«Ma il contare noi porremo che non è altro se non l'indagare quanto grande un numero si trovi ad essere?»

«È così.»<sup>164</sup>.

Si dice, poi, giustamente che è identico il numero delle pecore e dei cani, se esso è uguale in tutti e due i casi, ma che la decade non è identica né sono identici dieci oggetti<sup>165</sup>.

L'unità, di conseguenza, non può che essere pensata come l'unità indivisibile dei Pitagorici. Ritengo significativo, a tal proposito, riportare un passo del *Parmenide*, nel quale Platone argomenta per mostrare come l'*uno* debba essere detto assolutamente *privo di parti*. Evidentemente, nel tempo tale concetto di unità si era consolidato e profondamente radicato nel pensiero matematico greco, e la sua indivisibilità aveva trovato un fondamento filosofico, trascendendo il mero orizzonte aritmetico.

162 GIAMBILICO, *Sulla introduzione all'aritmetica di Nicomaco*, par. 10. L'edizione di riferimento è: GIAMBILICO, *Sulla introduzione all'etica di Nicomaco*, in *Il Numero e il Divino*, a cura di Francesco Romano, Rusconi, Milano 1995.

163 Cfr. B. CENTRONE, *Introduzione ai Pitagorici*, cit., p. 117.

164 PLATONE, *Teeteto*, 198 c.

165 ARISTOTELE, *Fisica*, IV, 224 a 2-4.

«Ebbene», disse Parmenide, «se l'Uno è Uno, non è vero che per nessuna ragione potrà essere molti? »  
 «Infatti, come potrebbe?»  
 «Allora è necessario che non si abbia una parte dell'Uno e che esso stesso non sia un tutto».  
 «Perché?»  
 «La parte è parte di un tutto».  
 «Sì».  
 «Che cos'è un tutto? Non è forse quello a cui non manca alcuna parte?»  
 «Senz'altro».  
 «Quindi, in ambedue i casi, che sia un tutto o che abbia parti, l'Uno sarebbe composto di parti».  
 «Necessariamente».  
 «Pertanto, in un caso o nell'altro, l'Uno sarebbe molti, ma non Uno».  
 «Vero».  
 «Occorre invece che sia non molti, ma Uno».  
 «È necessario».  
 «Non sarà quindi un tutto e non avrà parti l'Uno, se è Uno».  
 «No di certo»<sup>166</sup>.

Dall'universo della matematica greca, dunque, vengono bandite tutte quelle quantità non riducibili ai nostri numeri naturali. Nemmeno quelli che oggi sono detti *numeri frazionari* possono essere considerati numeri: essi al massimo sono λόγοι, ossia coppie ordinate di numeri naturali, ma senz'altro non parti di un'unità. Questo modo di concepire il numero, che pure non è l'unico possibile, resterà tuttavia l'unico ammesso dalla matematica greca, la quale si dimostrerà sostanzialmente incapace di ripensare questo concetto:

La virtù greca di insistere sulle dimostrazioni e sui concetti esatti si trasformava in difetto per quel che riguarda la matematica creativa<sup>167</sup>.

### ***I numeri nelle civiltà pre-elleniche.***

Osserviamo, tuttavia, che i numeri non interi possono essere utilizzati nei calcoli tanto quanto gli interi, fornendo validamente aiuto a qualsiasi esigenza di carattere pratico. È pertanto lecito supporre che anche nel mondo greco si operasse nella pratica con i numeri frazionari, sebbene essi non fossero considerati, a rigore, come *esistenti*.

166 PLATONE, *Parmenide*, 137 c-d.

167 M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, cit., p. 203.

Il popolo viveva felice in questa spregevole promiscuità logica e, senza preoccuparsi di nulla, continuava a fare calcoli con «numeri frazionari»: per la semplice ragione che, con ogni meraviglia, la presunta intollerabile contraddizione logica non portava a nessun errore nel corso dei calcoli. Al contrario, i numeri frazionari permettevano una facile esecuzione dei calcoli, mentre le teorie dei *savants*, logicamente immacolate, potevano solo rendere insopportabilmente difficili questi calcoli. Da parte sua, il popolo trovava i morsi di coscienza dei Pitagorici, con i quali si rendevano ad arte difficile la vita, non solo inutili, ma soprattutto estremamente ridicoli<sup>168</sup>.

Sembra che questo rifiuto di operare con i numeri non interi sia squisitamente greco, frutto proprio della volontà di rendere le matematiche perfettamente pure, indipendenti da qualsiasi utilità pratica. Nelle civiltà pre-greche, infatti, troviamo che i calcoli su quantità non intere potevano essere eseguiti senza particolari difficoltà.

In Egitto, ad esempio, si faceva ampiamente uso delle frazioni, che venivano inserite nei calcoli senza che ciò creasse problemi ai matematici. L'unica difficoltà percepita stava nel pensare a frazioni con numeratore diverso da uno, esistevano tuttavia dei procedimenti che permettevano di ridurre qualsiasi frazione ad una somma di frazioni aventi, appunto, l'unità al numeratore.

Nel mondo babilonese, invece, si arrivò addirittura ad utilizzare quelli che noi chiameremmo “numeri con la virgola”. Sappiamo, infatti, che presso questa civiltà era in uso la notazione sessagesimale, la quale sfruttava tra l'altro il principio posizionale, per il quale lo stesso simbolo, posto in due posizioni diverse, assume diverso valore: esso va infatti moltiplicato per le successive potenze della base. Il nostro sistema di numerazione, ad esempio, è in base dieci: abbiamo dieci cifre con le quali comporre tutte le possibili quantità, moltiplicandole per le diverse potenze del 10. 367, ad esempio, significa  $3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ . Il sistema di numerazione babilonese funzionava in modo del tutto analogo, ma utilizzava come base il 60 anziché il 10. La scrittura 22, 15, 45, ad esempio, significava  $22 \cdot 60^2 + 15 \cdot 60^1 + 45 \cdot 60^0 = 80145$ .

La cosa interessante è che tale notazione veniva utilizzata anche per esprimere quantità non intere: il principio posizionale veniva infatti applicato anche alle potenze con esponente negativo. Il “numero” 1,5, ad esempio, poteva essere espresso come 1; 30, ossia come  $1 \cdot 60^0 + 30 \cdot 60^{-1}$ . Tale modo di esprimere le frazioni dell'unità è del tutto analogo a

168 I. TOIH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., pp. 77-78.

quello che adottiamo noi oggi quando facciamo uso dei “numeri con la virgola: 1,5, infatti, significa proprio  $1 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1}$  <sup>169</sup>.

È chiaro, dunque, che presso queste civiltà l'attribuzione dello statuto di *numero* alle quantità non intere non costituiva un problema, ed anzi facilitava l'esecuzione di calcoli e la risoluzione di problemi.

### **3. Esprimere gli irrazionali con i numeri: la sequenza delle diagonali effabili.**

Vorrei, a questo punto della trattazione, presentare un caso particolarmente emblematico delle difficoltà che si ebbero a conciliare aritmetica e geometria a seguito della scoperta dell'incommensurabilità.

Come si è visto, erano stati fatti dei tentativi di esprimere la *misura* della diagonale di un quadrato rispetto al suo lato (ossia di esprimere attraverso un λόγος pitagorico quella che noi oggi chiamiamo  $\sqrt{2}$ ): tentativi che erano sistematicamente falliti, conducendo infine alla dimostrazione dell'impossibilità *di principio* di esprimere questa *misura*. Esistevano, tuttavia, nell'antica Grecia alcuni algoritmi che permettevano di calcolare una serie di frazioni, quindi proprio di λόγοι pitagorici, i quali rappresentavano approssimazioni via via migliori di  $\sqrt{2}$ : si tratta della cosiddetta “sequenza delle diagonali effabili”.

Un primo metodo di produrre questa sequenza di λόγοι è descritto da Teone di Smirne<sup>170</sup>. Si parte dall'approssimazione:

$$d_1 = 1; \quad l_1 = 1.$$

La scelta di partire proprio dal λόγοσ  $\frac{d}{l} = \frac{1}{1}$  viene giustificata da Teone, il quale osserva che l'1, essendo principio di tutto, è principio sia della diagonale che del lato, ed è pertanto in grado di generare entrambi<sup>171</sup>.

Si prosegue quindi nel calcolo delle successive frazioni secondo la formula:

$$d_n = 2 \cdot l_{n-1} + d_{n-1}; \quad l_n = l_{n-1} + d_{n-1}.$$

Ad esempio, il secondo λόγοσ si ottiene calcolando:

169 Per quanto esposto a questo capitolo, cfr. C. B. BOYER, *Storia della matematica*, cit., capp. 1-2 e O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., capp. 1-2, 4.

170 TEONE DI SMIRNE, *Matematica utile per la comprensione di Platone*, par. XXXI.

171 Ibidem.

$$d_2 = 2 \cdot l_1 + d_1 = 3; \quad l_2 = l_1 + d_1 = 2.$$

Si ottiene così il valore  $\frac{3}{2}$ , il quale costituisce un'approssimazione migliore di  $\sqrt{2}$ . I

valori successivi prodotti dall' algoritmo sono:

$$\frac{7}{5}; \quad \frac{17}{12}; \quad \frac{41}{29}; \quad \frac{99}{70}; \quad \frac{239}{169}; \quad \frac{577}{408} \dots$$

L'ultimo rapporto vale circa 1,4142156862....., valore molto prossimo a  $\sqrt{2}$ .

Esiste un altro metodo per calcolare dei  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\iota$  che approssimano  $\sqrt{2}$ : si utilizza in questo caso una "frazione continua":

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Come si vede, la funzione potrebbe continuare all'infinito. I primi valori che da essa si ottengono sono i seguenti:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

Si può chiaramente proseguire all'infinito, ottenendo valori sempre più prossimi a  $\sqrt{2}$ . Balza immediatamente all'occhio che i  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\iota$  trovati attraverso la frazione continua sono gli stessi prodotti dall' algoritmo prima descritto. Si osserva, tuttavia, che nessuno dei rapporti trovati soddisfa il teorema di Pitagora. Se così fosse, dovremmo avere

$$l^2 + l^2 = d^2, \quad \text{ossia} \quad 2 \cdot l^2 - d^2 = 0.$$

Eseguendo i calcoli, si trova invece:

$$2 \cdot 2^2 - 3^2 = -1$$

$$2 \cdot 5^2 - 7^2 = 1$$

$$2 \cdot 12^2 - 17^2 = -1$$

$$2 \cdot 29^2 - 41^2 = 1$$

e così via. Come si vede, la differenza tra il doppio del quadrato del lato e il quadrato della diagonale è sempre uguale all'unità, che compare alternativamente con segno positivo e negativo. I  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\iota$ , pertanto, non catturano mai il valore numerico della diagonale, ma oscillano sempre tra eccessi e difetti.

Una spiegazione del funzionamento del primo dei due procedimenti si può trovare proprio negli *Elementi* di Euclide, dove, nella proposizione 10 del Libro secondo, viene dimostrata l'uguaglianza:

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]^{172}.$$

Tale uguaglianza è sufficiente a rendere conto del fatto che, partendo dalla coppia (1; 1), è possibile, attraverso le formule

$$d_n = 2 \cdot l_{n-1} + d_{n-1}; \quad l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$$

generare infinite approssimazioni di  $\sqrt{2}$ : in appendice mostrerò perché, e fornirò anche due spiegazioni relative all'equivalenza della frazione continua a  $\sqrt{2}$ .

A questa particolare sequenza di valori si richiama anche Platone, che nella *Repubblica* fa riferimento alle “diagonali razionali di cinque”<sup>173</sup>. Chiaramente, egli si sta riferendo al numero 7, dal momento che nella sequenza delle diagonali effabili troviamo  $\frac{7}{5}$  come

approssimazione di  $\frac{d}{l}$ . Occorre innanzitutto notare che Platone si riferisce alla diagonale razionale in modo molto disinvolto, il che farebbe pensare che questi algoritmi fossero abbastanza diffusi, e che il concetto di *diagonale razionale* fosse conosciuto e ben padroneggiato dai matematici del tempo. L'espressione platonica, inoltre, suggerisce che vi fosse un secondo tipo di diagonale, rispetto alla quale la *diagonale razionale* si definirebbe per antitesi: avremmo dunque una grandezza razionale ma approssimata, e una grandezza irrazionale, ma esatta. Platone sembra essere ben consapevole dell'irriducibilità di queste due<sup>174</sup>.

Costruendo queste serie di λόγοι, si trova che la *misura* della diagonale risulta stretta tra due serie di valori convergenti, che approssimano  $\sqrt{2}$  con continui eccessi e difetti. Questo modo di catturare il valore stringendolo tra due sequenze convergenti è pressoché identico al modo in cui oggi si determinano i *numeri irrazionali*: essi sono infatti definiti come *elementi di separazione tra due serie di numeri razionali*. Il principio con cui si determinano questi enti matematici, peraltro, è analogo a quello con cui Eudosso determinava i suoi

172 Come si vedrà più approfonditamente nel corso del settimo capitolo, tale uguaglianza è dimostrata da Euclide solamente in termini geometrici.

173 PLATONE, *Repubblica*, 546 c.

174 Cfr. M. CAVEING, *L'irrazionalità dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, cit., pp. 68-73.

λόγοι, i quali, è bene sottolinearlo, potevano essere tanto razionali quanto irrazionali. L'uguaglianza tra due λόγοι si aveva infatti quando questi determinavano la stessa *sezione* all'interno della serie dei λόγοι pitagorici.

Ciò che mi preme maggiormente osservare in questa sede, tuttavia, è che queste sequenze, mirate a fornire la *misura* della diagonale, falliscono sistematicamente nel loro intento. Per quanto si prosegua, non si arriva mai a determinare un λόγος pitagorico che esprima in maniera *esatta* il rapporto tra lato e diagonale: gli eccessi e i difetti quindi mancano sempre il valore stesso. Noi, oggi, diamo il nome di *numero* a questo valore, all'elemento di separazione: si tratta, è vero, di un ente che ha le caratteristiche di una realtà in divenire piuttosto che quelle di una realtà ben definita, tuttavia esso *esiste*: sulla linea dei numeri, all'elemento di separazione tra le due classi di λόγοι corrisponde un qualcosa, vi è uno spazio ricolmo d'essere, e tale numero viene all'essere grazie ad un atto di creazione dello spirito umano<sup>175</sup>. Nel mondo greco, invece, tra le due serie di λόγοι non vi è nulla: il *numero*, ἄριθμός che elevato al quadrato restituisce come risultato 2 semplicemente *non esiste*.

Scrivo Proclo:

Avendo trovato nella geometria la possibilità di costruire un quadrato doppio di un quadrato, non trovandola nei numeri, noi diciamo che un quadrato è doppio di un altro, meno un'unità, come per esempio il quadrato di sette è il doppio del quadrato di cinque meno uno<sup>176</sup>.

Quello che emerge da questo tentativo di esprimere l'irrazionale è che i numeri, fintantoché sono pensati come numeri interi, non sono in alcun modo in grado di rendere conto della realtà geometrica. Le sequenze delle diagonali effabili è un metodo per piegare il numero, forzandolo ad esprimere le quantità irrazionali, e tuttavia è un metodo che fallisce, rivelando l'insufficienza del numero stesso a questo scopo. Il continuo non può in nessun modo essere ingabbiato dal discreto.

175 Cfr. I. TOUH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., pp. 372, 373.

176 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, par. 61.

#### **4. La rottura dell'aritmogeometria.**

Come si è detto al primo paragrafo di questo capitolo, la scoperta dell'incommensurabilità imponeva di rinunciare ad almeno uno dei concetti cardine della matematica pitagorica: o all'indivisibilità della monade, o alla corrispondenza tra aritmetica e geometria. Non era infatti possibile conciliare entrambi, contemporaneamente e senza contraddizione, con l'esistenza di grandezze incommensurabili. Rinunciare all'indivisibilità della monade, tuttavia, era fortemente problematico, dal momento che il concetto di numero, inteso come numero naturale, si era profondamente radicato nella mentalità matematica greca, e mancava la percezione stessa dell'esistenza di altri possibili modi intendere il numero.

Per mantenere un sistema coerente, dunque, occorreva prendere atto del fatto che l'aritmetica e la geometria andavano pensate come essenzialmente indipendenti l'una dall'altra. Il legame originario tra i due versanti della matematica doveva essere sciolto, o perlomeno fortemente allentato: la geometria diventava indiscussamente il regno del continuo e dell'irrazionale, mentre l'aritmetica restava fondamentalmente discreta.

In effetti, esaminando i testi di argomento matematico a nostra disposizione, notiamo che a seguito della scoperta dell'incommensurabilità vi fu una progressiva ma chiara presa di coscienza del fatto che molte realtà geometriche non trovano corrispettivo nell'aritmetica.

Di conseguenza, i due mondi andavano pensati come indipendenti: della sovrapposizione originaria rimase solamente qualche traccia, qualche richiamo prevalentemente formale, come avviene ad esempio nella prima definizione degli *Elementi*. Nei tre capitoli conclusivi della mia tesi mi propongo, tra le altre cose, di mostrare, in tre autori particolarmente significativi, fino a che punto sia maturata la consapevolezza che la realtà geometrica andava pensata come altra rispetto a quella aritmetica, e come siano stati poi intesi i rapporti tra le due realtà.

Ritengo che siano estremamente significative alcune parole di Proclo, nelle quali risulta evidente come aritmetica e geometria si fossero, nel tempo, nettamente distinte:



La geometria [...] occupa il secondo posto dopo l'aritmetica per il fatto che da questa è completata e determinata – in effetti tutto ciò che in essa è razionale e conoscibile è determinato da rapporti aritmetici<sup>177</sup>.

Il dominio della geometria, che ospitava al suo interno anche ciò che era irrazionale e inconoscibile, era dunque più vasto di quello dell'aritmetica. Quest'ultima, invece, restava limitata ai numeri interi, ed era quindi in grado di esprimere solo quantità razionali:

Dovunque c'è numero, lì c'è anche il commensurabile; e dove c'è il commensurabile, lì c'è anche numero<sup>178</sup>.

L'esistenza, nelle figure geometriche, di rapporti interi diventava di fatto un caso particolare. Alle due discipline corrispondevano principi diversi:

Il principio che ogni rapporto è razionale appartiene alla sola aritmetica, e per nulla alla geometria; infatti in questa ci sono anche rapporti irrazionali. E ancora il principio che gli gnomoni dei quadrati terminano col minimo quadrato è proprio dell'aritmetica; perché in geometria il minimo assoluto non esiste<sup>179</sup>.

Chiaramente, l'infinita divisibilità si può ritrovare solo nelle grandezze geometriche, che vanno pensate come continue. In aritmetica, invece, qualsiasi valore è sempre riconducibile ad una sommatoria di unità, le quali sono, come si è più volte precisato, indivisibili.

Dal momento che l'aritmetica rimane essenzialmente discreta, essa non è in grado di rendere conto di alcune realtà geometriche: la diagonale del quadrato, ad esempio, appartiene a pieno titolo al dominio dell'*essere*, tuttavia, in ambito aritmetico, ad essa non corrisponde nulla: il *λόγος* pitagorico che esprime la sua misura rispetto al lato, semplicemente *non esiste*. Si impone dunque di distinguere in maniera netta tra *grandezza* e *misura*. La prima appartiene solamente alla geometria, ed è indipendente dal numero: essa è infatti una proprietà pura dell'ente geometrico. La seconda, invece, necessita del concetto di numero, ed è sempre essenzialmente relativa: un segmento si misura solo rispetto ad un altro. Va da sé che, in qualsiasi segmento, è sempre possibile parlare di grandezza, ma non

177 Ivi, par. 48.

178 Ivi, par. 61.

179 Ivi, par. 60. Il secondo principio cui si riferisce Proclo è quello per cui si possono costruire i numeri quadrati disponendo in successivi gnomoni i punti-unità.

sempre è possibile riferirsi alla sua misura; nel quadrato, per rifarsi sempre allo stesso esempio, sia il lato che la diagonale hanno una grandezza, di cui non possono essere privati, e tuttavia, rispetto al lato, la misura della diagonale *non esiste*: abbiamo un segmento dotato di misura ma non di grandezza.

Vorrei infine osservare come la stessa incommensurabilità si manifesti in modo diverso nell'aritmetica e nella geometria. Ciò è evidente, ad esempio, nel caso del quadrato. Da un lato, infatti, abbiamo l'evidenza che non esiste un λόγος pitagorico che, moltiplicato per se stesso, restituisce due. Dall'altro, invece, riscontriamo che non esiste un segmento in grado di misurare assieme la diagonale e il lato del quadrato. Si tratta di due fatti legati tra loro, e tuttavia essenzialmente diversi. Otto Neugebauer è del parere che la prima osservazione sia stata condotta anteriormente, e quindi in maniera logicamente indipendente dalla seconda<sup>180</sup>.

Nel secondo capitolo ho presentato due possibili dimostrazioni dell'incommensurabilità nel quadrato: osservandole da vicino può essere constatata l'indipendenza del piano geometrico da quello aritmetico. La prima dimostrazione, basata sull'ἀνθυφαίρεσις, è una prova puramente geometrica, in cui il numero non riveste alcun ruolo. Ciò che viene dimostrato è appunto la verità, squisitamente geometrica, che non esiste alcun segmento, per quanto piccolo, che possa essere contenuto esattamente tanto nel lato quanto nella diagonale. La seconda prova, simmetrica alla precedente, è puramente aritmetica: ciò che si dimostra è infatti l'impossibilità di trovare due numeri  $m$  ed  $n$  tali che

$2m^2 = n^2$ , e solo questo. L'impossibilità di esprimere  $\frac{\text{lato}}{\text{diagonale}}$  con un λόγος pitagorico

del tipo  $\frac{m}{n}$  è una conseguenza, appunto, di quanto dimostrato.

180 Cfr. O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., p. 180.

## CAPITOLO 6. IL NUMERO IN ARISTOTELE

### 1. Il numero come numero naturale.

In Aristotele troviamo un'incredibile ricchezza di brani di argomento matematico, grazie ai quali si possono rinvenire le coordinate per ricostruire, con una certa precisione, in che modo egli pensò la natura del numero. Ciò che mi preme fin d'ora sottolineare è che, per quel che riguarda l'algebra, il filosofo si pone in sostanziale continuità con quanto era stato pensato dai Pitagorici. Troviamo, a riprova di ciò, numerosi passaggi in cui il richiamo al pitagorismo è evidente. Nel Libro  $\Delta$  della *Metafisica*, ad esempio, leggiamo:

Si dice che i numeri hanno determinate qualità: per esempio, i numeri composti e che non ridanno una sola dimensione, e dei quali sono copia la superficie e il solido: tali sono quei numeri prodotti dalla moltiplicazione di due fattori e di tre fattori<sup>181</sup>.

Difficile non scorgere sotto a queste parole un richiamo alla teoria Pitagorica per la quale era possibile raffigurare i numeri come insiemi di punti-unità: un numero risultante dal prodotto di due fattori poteva essere rappresentato in forma rettangolare, mentre il prodotto di tre fattori poteva essere reso disponendo i punti-unità su tre dimensioni, formando un parallelepipedo.

#### ***Il numero come somma di unità.***

Dal brano sopra riportato si può già intuire come *numero* fosse utilizzato dal filosofo come sinonimo di *numero naturale*, coerentemente con quella che era stata la visione pitagorica. Come si è avuto modo più volte di osservare, i numeri così com'erano intesi dai greci risultavano sempre composti da una sommatoria di unità, le quali funzionavano come degli atomi, dei mattoni minimi ed indivisibili. Solo un numero pensato in questo modo era funzionale all'azione del contare elementi discreti, solo questo numero poteva essere

181 ARISTOTELE, *Metafisica*,  $\Delta$  14, 1020 b 2-6.

rappresentato con una serie di punti o di sassolini, ed assumere così forma di poligono, o di parallelepipedo.

Anche in Aristotele il numero si genera solo per addizione di unità discrete: troviamo riscontro di ciò, ad esempio, in una serie di passaggi contenuti nella *Metafisica*.

Il numero [...] è costituito di unità, e l'unità coincide essenzialmente con l'uno<sup>182</sup>.

Il numero è una pluralità di unità<sup>183</sup>.

È necessario che il numero si formi per addizione: la diade, ad esempio, si forma sommando all'uno un altro uno; la triade sommando alle prime due unità un'altra unità, e con lo stesso procedimento anche la tetradè<sup>184</sup>.

Anche l'indivisibilità dell'uno, cardine della matematica pitagorica, viene esplicitamente postulata da Aristotele:

Ed è anche conforme a ragione che nella serie numerica il più piccolo sia il termine, ma che, procedendo verso un numero maggiore, ogni quantità venga sempre superata, e che nelle grandezze, invece, accada il contrario: difatti, procedendo verso il più piccolo, ogni grandezza è superata; procedendo, invece, verso il più grande, non c'è una grandezza infinita. E la ragione è che l'unità numerica è indivisibile, qualunque cosa essa sia, come l'uomo è un solo uomo e non già molti, mentre il numero è una pluralità di unità e una certa quantità: sicché, è necessario che esso abbia come fondamento l'indivisibile [...]<sup>185</sup>.

Date queste premesse, è del tutto evidente che può essere considerato numero solamente l'intero, unico a essere scomponibile in una serie di unità discrete. Non vi è modo di attribuire lo statuto di ἀριθμὸς ai numeri irrazionali, e nemmeno ai numeri frazionari. Troviamo evidenza di ciò nelle stesse parole di Aristotele:

Se Callia è un rapporto numerico di fuoco, terra, acqua e aria, anche l'Idea dovrà essere un rapporto numerico di certi altri elementi aventi funzione di sostrato. E l'uomo in sé – sia esso un determinato numero o no – sarà similmente un rapporto

182 Ivi, B 4, 1001 a 26-27.

183 Ivi, I 1, 1053 a 30.

184 Ivi, M 7, 1081 b 14-17.

185 ARISTOTELE, *Fisica*, III, 207 b 1-9.

numerico di certi elementi, e non semplicemente numero; e, per queste ragioni, non potrà essere un numero<sup>186</sup>.

Qui, dunque, Aristotele sta presentando il λόγος non come una particolare specie di numero, ma come un qualcosa di antitetico al numero stesso.

### ***Proprietà del numero.***

All'interno della *Metafisica* vengono attribuite al numero, implicitamente o esplicitamente, alcune proprietà. In particolare, vorrei soffermarmi brevemente su due di queste. All'interno del Libro I leggiamo:

È necessario che tutti i numeri siano o pari o dispari<sup>187</sup>.

L'uso di *pari* e *dispari* come di due contraddittori ci conferma immediatamente che Aristotele si sta riferendo soli ai numeri naturali. Si definisce dispari, infatti, ciò che non può essere diviso esattamente a metà, e pari ciò che invece risulta composto da due parti uguali tra loro. È del tutto evidente che solamente un numero composto di unità minime ed indivisibili può essere dispari: nel momento in cui i componenti del numero sono sempre ulteriormente divisibili, infatti, qualsiasi quantità può essere esattamente dimezzata.

Il numero altro non è se non la quantità delle sue unità. Essere «dispari» vuol dire essere una determinata quantità di unità. E quello che rende una determinata quantità «dispari» è la presenza di «una unità dispari»: il 3 è dispari perché ha un'unità in più rispetto al due che è pari<sup>188</sup>.

Mi preme, poi, soffermarmi sulla proprietà del numero di non essere mai *mutilo*. Quest'ultimo termine è definito dallo stesso Aristotele, che nel Libro Δ scrive:

Mutilo si dice di cose che sono quantità, ma (A) non una qualsiasi quantità, bensì solo una quantità che, oltre a essere divisibile, costituisca un intero. Il numero due, infatti, non è mutilo se gli si toglie una unità, perché (a) la parte che vien tolta con la mutilazione non è mai uguale alla parte restante. In generale nessun numero è mutilo:

186 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 9, 991 b 16-21.

187 Ivi, I 4, 1055 b 24-25.

188 E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 24.

infatti, perché una cosa sia mutila è necessario che (b) non muti la sua essenza: se una coppa è mutila è necessario che sia ancora una coppa, invece il numero non rimane più lo stesso<sup>189</sup>.

In altre parole, un tre a cui venga tolta un'unità non è un tre mutilo: esso semplicemente perde la sua essenza di tre per diventare un due. È del tutto evidente che questa giustificazione ha senso solo nel momento in cui si considera il numero come una raccolta di unità: esso non è quindi propriamente un *intero*, al massimo possiamo dire che esso è un *tutto*<sup>190</sup>. Di nuovo, troviamo conferma del fatto che in Aristotele non vi è spazio per una concezione di numero più ampia, e più moderna, in grado di rispecchiare di nuovo la geometria.

In conclusione di questo paragrafo vorrei infine accennare ad un'altra proprietà dei numeri, cui il filosofo fa riferimento nella *Fisica*: quella di essere *infiniti*. Il brano di riferimento si trova in *Fisica*, III, 207 b ed è già stato riportato più sopra. Come si ricorderà, in geometria si poteva parlare di infinito solamente per divisione: ogni grandezza poteva infatti essere divisa a piacere, senza che vi fosse un limite oltre il quale il processo di divisione non potesse proseguire. Al contrario, una grandezza infinitamente estesa non si dava mai. Abbiamo nell'aritmetica l'esatto opposto: che nel numero non si possa parlare di infinito per divisione è del tutto evidente, dal momento che, arrivato all'unità, il processo di divisione deve necessariamente arrestarsi. Si può, tuttavia, parlare di infinito per somma, dal momento che a qualsiasi numero è sempre possibile aggiungere un'unità, ottenendo sempre da capo un nuovo numero.

## **2. Razionale e irrazionale, aritmetica e geometria.**

Ritengo interessante esaminare, a questo punto della trattazione, in che modo Aristotele abbia inteso i rapporti tra il punto e l'unità, tra la geometria e l'aritmetica. Si ricorderà infatti che lo spazio geometrico era stato esplicitamente e consapevolmente pensato come continuo: i suoi rapporti con l'aritmetica saranno, di conseguenza, perlomeno problematici.

189 ARISTOTELE, *Metafisica*, Δ 27, 1024 a 11-16.

190 Cfr. E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 26.

Esistono, nell'opera di Aristotele, alcuni passaggi nei quali l'originario legame tra punto ed unità viene richiamato, in sostanziale continuità con la teoria pitagorica. Nel Libro  $\Delta$  della *Metafisica* leggiamo ad esempio:

Ciò che è indivisibile secondo la quantità e in quanto quantità, e che è indivisibile in tutte le dimensioni e non ha posizione, si chiama unità; invece, ciò che è indivisibile in tutte le dimensioni si chiama punto<sup>191</sup>.

È questo un chiaro richiamo alla teoria per cui il punto e l'unità sono concettualmente identici, salvo per il fatto che il primo è dotato di posizione. E tuttavia, Aristotele è ben consapevole del fatto che questa identificazione non è più possibile; d'altra parte, esaminando le sue parole con attenzione ci si accorge che in esse non c'è contraddizione: il punto inesteso è indivisibile tanto quanto l'unità pitagorica, dal momento che inestensione e indivisibilità sono due concetti indipendenti.

Ci sono numerosi passaggi che testimoniano come invece Aristotele avesse ben presente la differenza sostanziale che intercorre tra l'oggetto dell'aritmetica e quello della geometria. Leggiamo ad esempio:

Una quantità è (1) una pluralità se è numerabile; (2) è invece una grandezza se è misurabile. (1) Si chiama pluralità ciò che può dividersi in parti non continue; (2) si chiama invece grandezza ciò che può dividersi in parti continue<sup>192</sup>.

Viene qui chiaramente messa a fuoco la sostanziale dicotomia tra pluralità e grandezza, tra numerare e misurare. Si può numerare solo con elementi discreti, e misurare solo se ci si riferisce ad un qualcosa di continuo. Dunque, il punto e l'unità, costitutivi di due realtà diverse, la prima continua e la seconda discreta, di fatto non sono più in alcun modo assimilabili. Infatti:

I punti hanno come proprietà la contiguità, le unità la consecutività<sup>193</sup>.

191 ARISTOTELE, *Metafisica*,  $\Delta$  6, 1016 b 24-26.

192 Ivi,  $\Delta$  13, 1020 a 8-11.

193 ARISTOTELE, *Fisica*, V, 227 a 29-30. Il significato che rivestono per Aristotele i termini “contiguo” e “continuo” è già stato esposto al paragrafo 5 del terzo capitolo.

Se l'oggetto dell'aritmetica non ha più necessità di trovare corrispondenza in quello della geometria, allora è anche naturale che il legame tra le due si allenti. Si era osservato nello scorso capitolo che una delle soluzioni alle aporie causate dalla scoperta dell'incommensurabilità stava nello scindere il legame tra le due metà della matematica: in Aristotele si può osservare come questa scissione sia ormai avvenuta, e non dia più alcun tipo di problema. In particolare, l'aritmetica viene pensata come anteriore alla geometria:

Le scienze che presuppongono un minor numero di principi sono più esatte di quelle che presuppongono, altresì, l'aggiunta di <ulteriori principi>, come ad esempio l'aritmetica rispetto alla geometria<sup>194</sup>.

Quanto più gli oggetti della nostra conoscenza sono anteriori nell'ordine della definizione e sono semplici, tanto più la conoscenza è esatta: infatti l'esattezza altro non è che la semplicità. Di conseguenza, la scienza il cui oggetto prescinde dalla grandezza spaziale è più esatta di quella il cui oggetto include anche la grandezza spaziale, ed esatta in massimo grado è la scienza che astrae dal movimento<sup>195</sup>.

L'antiorità dell'aritmetica ha dunque una doppia giustificazione. In primo luogo, essa si basa su un numero minore di principi e di premesse rispetto alla geometria, in secondo luogo essa ha a che fare con oggetti che presentano un maggior grado di astrazione dal sensibile, essendo privi di grandezza spaziale. Vale qui la pena ricordare le parole di Proclo, già citate nel primo capitolo:

L'unità è senza posizione in quanto è immateriale e fuori di ogni dimensione e luogo. Posizione ha invece il punto, in quanto appare nei recessi dell'immaginazione, ed è quindi materializzato<sup>196</sup>.

Lo spazio geometrico, per quanto astratto e puramente razionale, mantiene sempre in qualche modo un legame con lo spazio fisico, del quale è immagine; ciò non avviene con il numero, che non sembra trovare alcun corrispettivo nella materia. Un'altra giustificazione dell'antiorità dell'aritmetica si può trovare osservando le definizioni tradizionali di punto e di unità: il punto è infatti definito come un'unità avente posizione. Si nota subito che questa

194 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 2 982 a 25-28.

195 Ivi, M 3, 1078 a 9-12.

196 PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, parr. 96-97.



definizione, avendo necessità di una determinazione aggiuntiva, è più complessa di quella di unità, e la presuppone<sup>197</sup>.

È tuttavia fondamentale tener presente che l'anteriorità dell'aritmetica non implica che da essa sia deducibile la geometria:

In realtà numero e grandezza hanno frontiere invalicabili, perché rappresentano i domini del discontinuo e del continuo<sup>198</sup>.

Con la scissione del legame tra aritmetica e geometria trovano una soluzione le aporie generate dalla scoperta dell'incommensurabilità: se non è più necessario che le realtà esistenti nell'una trovino un corrispettivo nell'altra, allora l'irrazionale può essere un fatto puramente geometrico, senza che questo generi alcuna contraddizione. E infatti, a livello geometrico l'irrazionale viene tranquillamente accettato, ed è addirittura presentato come un fatto normale, che non fa alcuna meraviglia, ma è al contrario scontato per chi si occupa di matematica:

Di nulla un geometra si meraviglierebbe di più che se la diagonale fosse commensurabile al lato<sup>199</sup>.

Si vede dunque che in Aristotele tutte le difficoltà e le riserve che c'erano state inizialmente ad accettare l'incommensurabilità vengono meno. Il filosofo dà anche una spiegazione del fenomeno:

Con due misure si misurano la diagonale, e così il lato e tutte le grandezze<sup>200</sup>.

Non è dunque vero che non è possibile misurare la diagonale del quadrato: essa semplicemente richiede un'unità di misura diversa rispetto al lato. Si tratta di due grandezze entrambe perfettamente misurabili, ma su due diverse scale<sup>201</sup>.

197 Cfr. E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 205.

198 G. CAMBIANO, *Figura e Numero*, in AA.VV., *Il sapere degli antichi*, a cura di M. Vegetti, Boringhieri, Torino 1985, p. 95.

199 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 2 983 a 19-21.

200 Ivi, I 1, 1053 a 17-18.

201 Cfr. J.E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele. La Filosofia della matematica in Platone e Aristotele*, Vita e pensiero, Milano 1992 (orig. J. E. ANNAS, *Aristotle's Metaphysics, Books M and N, translated with introduction and notes*, Oxford University Press, Oxford 1976), p. 75.

Diverso è il discorso che va fatto per l'aritmetica. Come si ricorderà, sono commensurabili due valori che possono essere misurati dalla stessa unità. Si è visto anche che il numero è un insieme di unità: queste ultime costituiscono quindi la misura “obbligatoria” di qualsiasi numero. Pertanto, nell'universo dell'aritmetica l'incommensurabilità non si dà mai, proprio per la natura del numero stesso: anche due numeri primi fra loro, infatti, sono commensurabili con l'unità, e pertanto sono sempre commensurabili anche tra loro. Di ciò, Aristotele è ben consapevole, e scrive:

Il numero è commensurabile, e a ciò che è incommensurabile il numero non si può riferire<sup>202</sup>.

Si delineano quindi due ambiti ben distinti, indipendenti, non comunicanti: la geometria, dove regna il continuo e dove l'irrazionale è di casa, e l'aritmetica, la quale può tranquillamente rimanere legata al discreto, così com'era stata fin dalla sua origine.

La grande tragedia della matematica antica, cioè la scoperta di grandezze geometriche incommensurabili e quindi dell'irrazionale matematico, non sfiora la semplice simmetria degli *arithmoi* intesi come numeri interi positivi<sup>203</sup>.

### **3. Lo statuto ontologico degli enti matematici.**

Analizzando il concetto di numero così com'è proposto da Aristotele, si nota come esso resti fondamentalmente legato alla sua formulazione tradizionale, e come esso rifletta le intuizioni che, in tempi più antichi, dovevano aver dato origine allo stesso concetto di *numero*. Si è infatti già spiegato che questo nasce dall'esigenza dell'uomo di contare: le successive unità, *discrete* ma tutte uguali tra loro, possono essere fatte corrispondere agli elementi dell'insieme da contare. In Aristotele rimane un'evidente sovrapposizione tra il numero e il gruppo numerato, sovrapposizione che emerge, ad esempio, in un passaggio della *Metafisica*, in cui il filosofo scrive:

202 ARISTOTELE, *Metafisica*, Δ 15, 1021 a 5-6.

203 E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 25.

Si dice «numero» in due modi (ché noi chiamiamo numero non solo il numerato e il numerabile, ma anche il mezzo per cui numeriamo)<sup>204</sup>.

Dunque, fra il numero 5 e un insieme di 5 cavalli non c'è alcuna sostanziale differenza: anche il numero 5 è numero *di qualcosa*: esso è infatti numero di *pure unità*. Osserva Julia Annas che questa teoria è opportunamente antiplatonistica: Platone, infatti, aveva attribuito ai numeri e alle figure geometriche il modo d'essere della sostanza soprasensibile: alla stregua delle idee, questi esistevano prima e indipendentemente dalla mente di chi li studiava<sup>205</sup>. Congiungendo saldamente il numero alla cosa numerata, Aristotele sanciva invece la dipendenza del numero dall'azione del contare, e dunque dall'esistenza di esseri coscienti che potessero essere soggetti di questa azione<sup>206</sup>.

Non è possibile, quindi, per Aristotele, che gli enti matematici esistano come realtà separate, anteriori rispetto alle cose e rispetto agli uomini che pensano queste cose stesse. È, questa, un'affermazione nettamente polemica nei confronti del platonismo: vi è infatti fra i due filosofi un'insanabile distanza nel modo di concepire, a livello ontologico, i numeri e gli enti geometrici. Scrive Aristotele:

Se si affermerà che gli oggetti matematici esistono in questo modo, ossia come realtà separate, ne deriveranno conseguenze contrarie alla verità e a ciò che viene comunemente ammesso. In effetti, le grandezze matematiche, in virtù di questo loro modo di essere, dovrebbero essere anteriori alle grandezze sensibili; invece, secondo la verità, sono posteriori<sup>207</sup>.

L'esposizione delle teorie aristoteliche sullo statuto ontologico degli enti matematici è contenuta all'interno dei Libri *M* ed *N* della *Metafisica*, nei quali si può anche trovare una lunga serie di argomentazioni, volte a confutare le posizioni platoniche.

Il filosofo osserva che:

Se gli oggetti matematici esistono, essi, necessariamente, o dovranno esistere nelle cose sensibili – come sostengono alcuni pensatori –, oppure dovranno esistere

204 ARISTOTELE, *Fisica*, IV 11, 219 b 5-8.

205 Sullo statuto ontologico degli enti matematici in Platone si ritornerà più diffusamente nel corso dell'ultimo capitolo di questa tesi.

206 Cfr J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 74.

207 ARISTOTELE, *Metafisica*, M 2, 1077 a 14-18.

separati dalle medesime – così dicono altri pensatori –; e se non esistono in nessuno di questi due modi, o non esistono affatto, o esistono in un modo ancora diverso<sup>208</sup>.

Dopo aver radicalmente escluso le prime due ipotesi, il filosofo giunge ad affermare che:

Anche [...] gli enti matematici esistono, e proprio con quei caratteri di cui parlano i matematici<sup>209</sup>.

Quella che Aristotele tenta di compiere è un'operazione di conciliazione tra il fatto che gli oggetti sensibili non presentano, evidentemente, le caratteristiche degli enti matematici, e il fatto che pensare quest'ultimi come anteriori agli oggetti sensibili stessi genera una serie di aporie<sup>210</sup>. E tale conciliazione è possibile pensando che gli enti matematici nascano nel pensiero dell'uomo attraverso un processo di astrazione a partire dalla realtà fisica ed esperibile.

L'uomo in quanto uomo, per esempio, è uno e indivisibile; ora l'aritmetico lo considera appunto come uno e indivisibile, e poi indaga se ci sono proprietà che convengono all'uomo in quanto indivisibile. Invece il geometra considera l'uomo né in quanto uomo né in quanto indivisibile, ma lo considera come solido geometrico. Infatti le proprietà che all'uomo si potrebbero attribuire se egli non fosse indivisibile, è evidente che gli si possono attribuire prescindendo dall'indivisibilità e dalla umanità. Perciò i geometri ragionano correttamente: i loro discorsi riguardano cose che sono, e che sono realtà<sup>211</sup>.

Dei corpi che ci circondano, noi possiamo astrarre molteplici proprietà: quella di essere in quiete, o in movimento, di essere esteso, indivisibile, molteplice, e così via. Ciascuna proprietà può essere isolata dall'oggetto in questione, che può essere studiato solo in quanto esteso, indivisibile, molteplice, ecc... Dunque, le forme e i numeri possono essere trattati come enti astratti e perfetti; ciò non implica, tuttavia, che essi siano effettivamente indipendenti o separati dagli oggetti su cui sono stati esperiti: essi sono al contrario proprietà dell'oggetto stesso.

208 Ivi, M 1, 1076 a 32-35.

209 Ivi, M 3, 1077 b 32-34.

210 Cfr. J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 64.

211 ARISTOTELE, *Metafisica*, M 3, 1078 a 23-30.

Così le scienze matematiche non saranno scienze di cose sensibili, ma non saranno neppure scienze di altre cose separate dai sensibili<sup>212</sup>.

Reale fa giustamente osservare che, approcciandosi al testo aristotelico, occorre tener presente che, quando Aristotele parla di *astrazione*, egli si riferisce a qualcosa di diverso da ciò cui ci riferiamo noi. Oggi infatti si considera l'astrazione come un'operazione di semplificazione logica, mentre nel mondo greco il termine indicava una vera e propria operazione di analisi ontologica<sup>213</sup>.

La distanza che intercorre tra la posizione platonica e quella aristotelica può trovare un suo fondamento se si considera che i due filosofi avevano una diversa considerazione della realtà sensibile:

Aristotele parla da un'altra dimensione: da una dimensione nella quale il sensibile non è travolto dal divenire e dalla contraddizione, e non è di per sé inconoscibile intellettualmente. Il sensibile diventa super-sensibile: perché diventa sostanza, perché ha in sé la propria intelligibilità, e le condizioni della propria conoscibilità scientifica<sup>214</sup>.

Dunque, ancorare gli enti matematici alla realtà sensibile in Aristotele non implica relegarli ad un ambito di non conoscibilità scientifica: al contrario, essi diventano in questo modo perfettamente intellegibili.

Tuttavia, nel momento in cui gli enti matematici non appartengono ad un ambito ontologico superiore, la loro esistenza non è più necessaria. Alle matematiche interessano solo alcune delle proprietà degli oggetti che studiano, e fra queste non vi è l'esistenza: che essi siano o non siano, è indifferente. Vi sono numerosi passaggi, nell'opera aristotelica, in cui viene precisato che, dal fatto che noi conosciamo gli enti matematici e che vi operiamo, non consegue necessariamente la loro esistenza:

L'espressione definitoria non è un'ipotesi: dire che cos'è l'unità non equivale infatti a dire che l'unità è<sup>215</sup>.

Il numero e qualsiasi altra cosa avente materia potrebbero anche non essere<sup>216</sup>.

212 Ivi, M 3 1078 a 3-5.

213 Cfr. G. REALE, *Guida alla lettura della Metafisica di Aristotele*, Laterza, Roma Bari 1997, p. 169.

214 E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 184.

215 ARISTOTELE, *Analitici Secondi*, I 2, 72 a 21-24.

216 ARISTOTELE, *Metafisica*, N 2, 1088 b 20-21.

Dunque, privare gli enti matematici della loro superiorità ontologica significa rendere la loro esistenza un qualcosa di non più necessario; tuttavia, ciò non è sufficiente ad invalidare i ragionamenti matematici stessi, i quali rimangono validi, a prescindere dall'esistenza o meno del loro oggetto:

La matematica, parlando di ciò che è, e di ciò che è in un determinato modo, dice la verità<sup>217</sup>.

#### **4. L'uno e l'unità di misura.**

Il primo capitolo del Libro *I* della *Metafisica* contiene una lunga discussione intorno all'*uno*, nel corso della quale vengono presentate alcune riflessioni sul numero, e sul suo rapporto con l'unità, che non coincidono perfettamente con quelle proposte nel Libro *M*, e anzi, sotto alcuni aspetti, le superano per complessità e per modernità.

Per comprendere a fondo la particolare sfumatura del concetto di *unità* contenuta in queste riflessioni, occorre prima soffermarsi brevemente su un altro concetto: quello di *unità di misura*. Per unità di misura si intende ciò che viene considerato come indivisibile ai fini del misurare o del contare. Ad esempio, se si vuole misurare una lunghezza, si sceglierà come unità di misura un'altra lunghezza, e si procederà a contare quante di queste unità sono contenute nel segmento di partenza.

La misura deve sempre essere qualcosa di identico rispetto a tutte le cose misurate: per esempio, se si tratta di cavalli, la misura dev'essere cavallo, se si tratta di uomini la misura deve essere uomo; se, invece, si tratta di misurare uomo, cavallo e Dio, la misura sarà senza dubbio il vivente, e il numero che ne risulterà sarà un numero di viventi<sup>218</sup>.

In generale, tutto ciò che è indivisibile, e appunto in quanto indivisibile, vien detto unità: per esempio, se alcune cose sono indivisibili se considerate come uomo, esse saranno l'unità uomo; se, invece, sono indivisibili se considerate come animale, saranno l'unità animale, e se sono indivisibili se considerate come grandezze, saranno l'unità grandezza<sup>219</sup>.

217 E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 85.

218 ARISTOTELE, *Metafisica*, N 1, 1088 a 8-11.

219 Ivi, Δ 6, 1016 b 3-6.

Misurare significa contare quante volte l'unità è contenuta, appunto, nella cosa da misurare. Si può misurare una grandezza, un peso, un tempo, ma anche un insieme di elementi discreti, di qualunque tipo essi siano. Sempre, per misurare, occorre scegliere un'unità che sia omogenea alla cosa da misurare: la misura di una lunghezza è una lunghezza, la misura di un gregge è la pecora, e così via. Questa unità, che per sua natura potrebbe anche essere a sua volta divisibile, dev'essere considerata, nel momento in cui la si vuole utilizzare come unità di misura, come un *indivisibile*.

Interessante è il caso delle unità di misura utilizzate in geometria. Come sappiamo, Aristotele aveva ben presente che lo spazio geometrico andava pensato come continuo, e che dunque qualsiasi lunghezza, superficie o volume è per sua natura sempre scomponibile in parti più piccole. Le unità di misura di grandezza, infatti, non sono mai indivisibili di per sé: semplicemente, nel processo di infinita divisione dello spazio si decide deliberatamente di arrestarsi, e di considerare un certo segmento come la base da utilizzare per la misurazione:

Perfino nella misura delle linee si usa la linea di un piede, considerandola come indivisibile<sup>220</sup>.

Nel Libro *I* della *Metafisica*, viene messa in rilievo l'analogia profonda che sussiste tra l'uno e l'unità di misura. Così come l'unità di misura del tempo è un intervallo di tempo, e l'unità di misura di un insieme di cavalli è un cavallo, così l'unità di misura del numero è l'unità. Scrive la Annas:

L'unità di misura è ciò che viene preso come indivisibile ai fini di operare una misurazione, e similmente, l'unità in matematica è ciò che viene preso come indivisibile ai fini di contare o di computare. In questo modo, il problema dell'indivisibilità delle unità matematiche è risolto senza ricorrere al postulato platonico dell'esistenza di unità perfette, pure ed indivisibili. L'unità matematica è soltanto un oggetto fisico ordinario *considerato come* indivisibile allo scopo di contare; non è affatto un diverso tipo di oggetto<sup>221</sup>.

220 Ivi, I 1, 1052 b 32-33.

221 J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 72. Sull'argomento cfr. anche P. DONINI, *La Metafisica di Aristotele. Introduzione alla Lettura*, NIS, Roma 1995, p. 72.

Occorre, a mio avviso, fare attenzione a non fraintendere il messaggio di Aristotele: mentre l'unità *piede* o l'unità *cavallo* sono indivisibili perché noi le consideriamo tali, l'uno numerico è invece indivisibile in sé e per sé, e solo per analogia all'uno tutte le altre cose possono essere dette indivisibili. In questa distinzione si riflette di fatto la distanza insormontabile tra una geometria del continuo e un'aritmetica che resta invece essenzialmente discreta.

Non tutto ciò che è uno è indivisibile allo stesso modo, come ad esempio il piede e l'unità: questa è indivisibile in tutti i sensi, quello va invece posto fra le cose che sono indivisibili, come si è già detto, solo rispetto alla percezione sensibile: infatti, tutto ciò che è continuo è certamente divisibile<sup>222</sup>.

A questo punto, si chiarisce ulteriormente il rapporto che sussiste tra numero e unità: questa infatti non è solo il “mattoncino” costitutivo del numero, il suo principio, ma è anche l'unità di misura attraverso cui il numero può essere misurato.

Il numero è un molteplice misurabile con l'uno. E, in un certo senso, uno e numero sono tra loro opposti, non, però, come contrari, ma come si è detto di certi relativi: l'uno e il numero si contrappongono, in quanto l'uno è misura e il numero il misurabile<sup>223</sup>.

222 ARISTOTELE, *Metafisica*, I 1, 1053 a 21-24.

223 Ivi, I 6, 1057 a 3-7.



## CAPITOLO 7. IL NUMERO NEGLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE

### 1. Unità e numero.

Nei precedenti due capitoli mi sono occupata di esaminare le problematiche generali legate alla formulazione del concetto di numero, emerse in particolare a seguito della scoperta dell'incommensurabilità, e di indagare in che modo Aristotele abbia pensato il numero stesso, anche in relazione all'unità. Mi propongo ora di studiare come le quantità numeriche siano trattate all'interno dell'opera di Euclide, cercando, tra le altre cose, di evidenziare in che modo negli *Elementi* vengano declinati i rapporti tra aritmetica e geometria, e quanto la teoria delle proporzioni proposta nel Libro quinto possa essere considerata applicabile a quelli che noi definiamo *numeri reali*. Mi interessa particolarmente condurre questa indagine sull'opera di Euclide, poiché quest'ultima si propone come un compendio di tutto il sapere matematico fino ad allora acquisito, e pertanto in essa è possibile ritrovare una posizione ponderata, e in grado di rendere conto delle più autorevoli teorie in materia che dovevano esservi all'epoca.

Lo studio delle quantità numeriche viene affrontato per la prima volta nel Libro settimo: i primi sei Libri erano infatti dedicati allo studio della geometria piana, all'esposizione della teoria delle proporzioni<sup>224</sup>, e all'applicazione di quest'ultima alla geometria stessa. Le prime due definizioni del Libro settimo sono estremamente significative, e già ci permettono di cogliere il succo della concezione euclidea di numero:

Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno<sup>225</sup>.

Numero è una pluralità composta di unità<sup>226</sup>.

224 Si vedrà più diffusamente nel seguito del capitolo come la teoria delle proporzioni contenuta negli *Elementi*, che altro non è se non la teoria proposta da Eudosso (di cui si è già parlato nel corso del secondo capitolo), non possa essere riferita alla quantità numeriche, e debba quindi essere riferita di fatto solamente alla geometria.

225 EUCLIDE, *Elementi*, VII, def. 1.

226 Ivi, VII, def. 2.

Difficile, specie per quanto riguarda la seconda definizione, non rilevare l'analogia con molte delle definizioni esaminate finora. Si ricorderà, ad esempio, che Aristotele definiva il numero «una pluralità di unità»<sup>227</sup>, e che Giamblico riportava alcune definizioni di numero, attribuite ad altrettanti autorevoli matematici: «sistema di unità», «estensione e attuazione dei principi seminali immanenti all'unità», «progressione di numeri a partire dall'uno e regressione all'uno», «quantità determinata»<sup>228</sup>. Dunque, non sembra esservi in Euclide alcuna particolare novità rispetto ai suoi predecessori: egli continua infatti a definire *numero* solo l'intero, che va pensato come somma di unità indivisibili.

Per quanto riguarda la prima definizione, invece, essa non sembra ricalcare definizioni già viste, sebbene il suo significato sia chiaro: l'unità va pensata come il minimo indivisibile, in sostanziale accordo con quanto teorizzato fino ad allora. Osserva Frajese:

Questa *definizione* di unità sembra alludere ad una sorta di *idea* platonica. Ogni singola cosa è detta «una» se è in relazione con l'«unità» (saremmo quasi tentati di dire: se *partecipa* dell'idea di unità)<sup>229</sup>.

Tale osservazione può essere messa in relazione con quanto detto al capitolo quarto, a proposito della possibile presenza di un influsso della filosofia platonica negli *Elementi*.

Vorrei a questo punto aprire una breve parentesi, e ricercare negli *Elementi* la presenza di richiami all'aritmetica pitagorica. Come si è visto, nel Libro primo Euclide aveva esordito con la celebre definizione di punto, che ricalcava la tradizionale definizione pitagorica, come una sorta di omaggio al fondatore della matematica greca. Tuttavia, già a partire dalla seconda definizione cominciava a delinarsi un quadro che con la geometria pitagorica aveva ben poco a che vedere: lo spazio geometrico era infatti divenuto continuo, e il punto, puramente ideale, era un ente geometrico a dimensione zero, e non più uno, com'era stato per la matematica delle origini.

Diverso è invece il discorso per quanto riguarda i Libri dedicati all'aritmetica: già dalle prime definizioni, infatti, è chiaro che in Euclide non si trova alcuna sostanziale novità nel modo di concepire i numeri: l'unità rimane il minimo indivisibile, il numero rimane una somma di unità, e il termine ἀριθμός continua ad essere riferibile solamente alle quantità

227 ARISTOTELE, *Metafisica*, I 1, 1053 a 30.

228 GIAMBILICO, *Sulla introduzione all'aritmetica di Nicomaco*, par. 10.

229 A. FRAJESE, nota 1, p. 427 in EUCLIDE, *Elementi*, cit.

intere. Gli sconvolgimenti che avevano interessato la geometria, e che Euclide dimostra di conoscere e padroneggiare pienamente, non sembrano in alcun modo scalfire il perfetto ordine dell'aritmetica pitagorica. Le definizioni XVI-XIX sono a tal proposito emblematiche:

Quando due numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un terzo numero, il prodotto si chiama numero piano, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi «lati»<sup>230</sup>.

Quando tre numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un quarto numero, il prodotto si chiama numero solido, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi «lati»<sup>231</sup>.

Numero quadrato è quello che è prodotto di due numeri uguali, ossia è un numero piano che ha per lati due numeri uguali<sup>232</sup>.

[Numero] cubo è quello che è prodotto di tre numeri uguali, ossia è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali<sup>233</sup>.

Della teoria dei numeri, dunque, fanno parte anche tutte quelle osservazioni che erano state condotte dai primi Pitagorici, i quali associavano, come si ricorderà, le quantità numeriche a figure piane e solide, in base a com'era possibile disporre i punti-unità che le componevano.

Il numero, così com'è pensato da Euclide, gode chiaramente delle stesse proprietà di cui aveva parlato Aristotele. In particolare, ogni numero è sempre o pari o dispari: un numero dispari non può essere diviso a metà, dal momento che rimane sempre un'unità in esubero:

Numero pari è quello che è divisibile in due parti (= numeri) uguali<sup>234</sup>.

Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti (= numeri) uguali, ossia quello che differisce di un'unità rispetto a un numero pari<sup>235</sup>.

230 EUCLIDE, *Elementi*, VII, def. 16.

231 Ivi, VII, def. 17.

232 Ivi, VII, def. 18.

233 Ivi, VII, def. 19.

234 Ivi, VII, def. 6.

235 Ivi, VII, def. 7.

Un'altra proprietà del numero è, ovviamente, quella di essere sempre commensurabile: l'incommensurabilità risulta esclusa a priori dal dominio dell'aritmetica. L'unità, infatti, è per definizione contenuta un numero esatto di volte in qualsiasi numero, e pertanto qualsiasi coppia di numeri avrà sempre, necessariamente, almeno un divisore comune: l'uno.

Numero primo è quello che è misurato (= è diviso) soltanto dall'unità<sup>236</sup>.

Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura (= divisore) comune<sup>237</sup>.

## 2. Operare con gli irrazionali. Il Libro II e il Libro X.

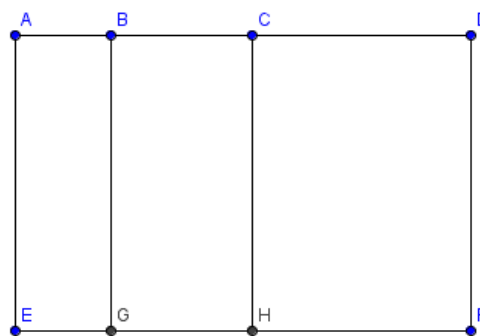
### *Il Libro II.*

Il Libro secondo si compone di sole quattordici proposizioni, ed è stato definito il Libro dell'*algebra geometrica*. Le prime dieci proposizioni, infatti, contengono altrettante dimostrazioni, tutte relative all'equivalenza delle aree di particolari quadrati e rettangoli, che possono essere ricondotte a dell'algebra da noi oggi comunemente utilizzata.

La prima proposizione, ad esempio, dimostra che:

Se si danno due rette, e si divide una di queste in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale alla somma dei rettangoli compresi dalla retta indivisa e dalla somma di ciascuna delle sue parti<sup>238</sup>.

In altre parole, si dimostra, prendendo come esempio la figura qui riportata, che l'area dell'intero rettangolo ADFE è equivalente alla somma delle aree dei rettangoli ABGE, BCHG, CDFH. È evidente che questa



236 Ivi, VII, def. 11.

237 Ivi, VII, def. 12.

238 Ivi, II, 1.

dimostrazione, condotta da Euclide per via puramente geometrica, corrisponde alla formula:

$$a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an.$$

che noi utilizziamo comunemente nell'algebra. Le proposizioni 1-10 corrispondono alle seguenti formule:

1.  $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$ ;
2.  $a(a + b) + b(a + b) = (a + b)^2$ ;
3.  $a(a + b) = ab + a^2$ ;
4.  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ;
5.  $ab + [\frac{1}{2}(a + b) - b]^2 = [\frac{1}{2}(a + b)]^2$ ;
6.  $b(2a + b) + a^2 = (a + b)^2$ ;
7.  $(a + b)^2 + a^2 = 2a(a + b) + b^2$ ;
8.  $4a(a + b) + b^2 = [(a + b) + a]^2$ ;
9.  $a^2 + b^2 = 2\{[\frac{1}{2}(a + b)]^2 + [\frac{1}{2}(a + b) - b]^2\}$ ;
10.  $(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$ <sup>239</sup>.

È chiaro che le grandezze coinvolte in queste dimostrazioni possono essere tanto razionali, quanto irrazionali. La distinzione tra commensurabile ed incommensurabile non è ancora stata evidenziata a questo punto dell'opera, e d'altra parte essa è, agli scopi del Libro secondo, completamente irrilevante. Le uguaglianze, infatti, sono dimostrate indipendentemente dalla razionalità o dall'irrazionalità dei segmenti utilizzati; d'altra parte, già nei primi due Libri, si trovano numerosi casi in cui Euclide opera con segmenti incommensurabili, senza aver la necessità di esplicitarlo<sup>240</sup>.

Le dieci formule riportate appartengono all'algebra da noi oggi conosciuta ed utilizzata. Esse, indipendentemente dalla loro formulazione geometrica, possono essere usate per operare con i nostri numeri: si possono riferire non solo agli interi, ma anche a tutti gli altri numeri reali. Tuttavia, non è questo il senso in cui Euclide le intende: esse parlano il linguaggio della geometria, e alla geometria si riferiscono. Noi possiamo attribuire

239 L'uguaglianza dimostrata nella decima proposizione è estremamente importante, dal momento che, a partire da essa, è possibile giustificare il funzionamento dell'algoritmo per il calcolo delle serie di frazioni nota come "sequenza delle diagonali effabili", di cui si è parlato nel quinto capitolo.

240 Ad esempio, nell'undicesima proposizione di questo secondo Libro Euclide insegna a dividere un segmento in media ed estrema ragione, e questo, come si è visto, è uno dei più noti e più evidenti casi di incommensurabilità tra segmenti.

un valore numerico (non necessariamente intero) ai segmenti di retta per ottenerne delle formule algebriche, tuttavia negli *Elementi* non troviamo alcuna indicazione in tal senso: un segmento di retta è per Euclide solo un segmento di retta. Tutte le operazioni vengono svolte sempre e solo su grandezze geometriche: dove, nelle formule da me indicate, compare una moltiplicazione, Euclide sta parlando di aree di rettangoli, mentre l'area di un quadrato risulta nella sua scrittura algebrica come potenza.

L'algebra geometrica, dunque, si presenta come una vera e propria sostituta della nostra algebra, e garantisce la possibilità di operare con qualsiasi valore. Essa, con ogni probabilità, nasceva proprio in risposta alla scoperta dell'incommensurabilità: la consapevolezza dell'esistenza di segmenti irrazionali, unita all'incapacità di pensare come numeri anche le quantità non intere, infatti, imponevano di riformulare le conoscenze aritmetiche ed algebriche in chiave puramente geometrica, continuando così a garantire la possibilità di applicarle anche alle quantità irrazionali<sup>241</sup>.

Proprio in questo sta l'importanza del Libro secondo. Da un lato, infatti, in esso risulta evidente come Euclide padroneggiasse le grandezze incommensurabili, tanto da non aver nemmeno bisogno di distinguerle formalmente dalle commensurabili. Dall'altro, è significativo che non vi sia accenno alla possibilità di riferire le conoscenze esposte ai numeri: l'irrazionale esiste solamente in geometria, e perché si possa operare su una certa grandezza occorre che essa, appunto, si manifesti sotto forma di segmento. La separazione tra aritmetica e geometria in Euclide è dunque perfettamente compiuta.

### ***Il Libro X.***

Osservazioni analoghe a quelle condotte per il Libro secondo possono essere riferite anche al Libro decimo. Quest'ultimo è il più lungo degli *Elementi*, ed è interamente dedicato alla teoria degli irrazionali, che Euclide dimostra di conoscere e padroneggiare perfettamente. Solo a questo punto dell'opera viene messa a fuoco la differenza tra segmenti commensurabili ed incommensurabili: tutto ciò che era stato esposto nei precedenti Libri poteva infatti essere applicato senza distinzioni tanto alle grandezze razionali, quanto alle irrazionali.

241 Cfr. O. NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, cit., p. 280.

La prima definizione del Libro recita:

Si dicono grandezze commensurabili quelle che sono misurate da una stessa misura, ed incommensurabili quelle di cui non può esistere nessuna misura comune<sup>242</sup>.

Euclide si sta qui riferendo a grandezze di qualsiasi tipo, tuttavia, già dalla seconda definizione risulta evidente che la teoria degli irrazionali si riferisce solamente a segmenti di retta:

Sono commensurabili in potenza rette tali che i quadrati su esse costruiti possano venir misurati da una stessa area, ed incommensurabili in potenza quando i loro quadrati non ammettono nessuna area come misura comune<sup>243</sup>.

In tutto il resto del Libro, Euclide si riferirà all'incommensurabilità solamente in relazione a segmenti, dei quali non è necessario esprimere la misura. Ricordo che esiste una differenza essenziale tra *grandezza* e *misura*: la prima è infatti una proprietà pura dell'oggetto geometrico, mentre la seconda è sempre relativa ad un secondo oggetto geometrico e deve poter essere espressa numericamente. La prima definizione va letta alla luce di ciò: Euclide parla di irrazionale in relazione a *grandezze*, e mai a *misure*; e tuttavia il concetto di misura è fondamentale nella definizione di irrazionale stesso. Nessun segmento, infatti, può essere irrazionale di per sé, ma sempre e soltanto in relazione ad un altro segmento considerato come razionale, che funge da unità di misura:

[...] Si dimostra che, rispetto ad una qualunque retta assunta come data, esistono in quantità infinita rette commensurabili e rette incommensurabili con essa: queste ultime o incommensurabili soltanto in lunghezza, od anche in potenza. Si chiami dunque razionale la retta che si assume come data in partenza, e razionali le rette con questa commensurabili, sia in lunghezza ed in potenza, sia soltanto in potenza, e si chiamino invece irrazionali quelle che sono incommensurabili con essa<sup>244</sup>.

Si osserva che Euclide chiama *razionali* anche le rette commensurabili solo in potenza con la retta razionale data, ossia quelle rette, descritte nella definizione due, che quadrano

242 EUCLIDE, *Elementi*, X, def. 1.

243 Ivi, X, def. 2.

244 Ivi, X, def. 3.

un numero intero; noi diremmo: le radici di numeri quadrati non perfetti. *Irrazionale e incommensurabile* non sono dunque sinonimi, in Euclide.

Troviamo, sempre nel Libro X, un criterio per stabilire quando due rette sono commensurabili:

Quadrati di rette commensurabili in lunghezza hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; ed i quadrati che abbiano fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, avranno anche i lati commensurabili in lunghezza. Invece, i quadrati di rette incommensurabili in lunghezza non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; ed i quadrati che non abbiano fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, non avranno neppure i lati commensurabili in lunghezza<sup>245</sup>.

È evidente la somiglianza tra questo criterio e quello indicato da Platone, nel brano del *Teeteto* analizzato nel capitolo secondo.

In generale, dalle definizioni fin qui esaminate emerge che i segmenti irrazionali sono sempre dotati di grandezza, e tuttavia la loro misura *non esiste*. L'irrazionale "puro" non si ritrova mai: esso deve necessariamente essere riscontrabile in un segmento. Osserva Lodovico Geymonat che:

[Euclide] non riesce [...] a pensare un rapporto come effettivamente esistente se non quando è in grado di ideare qualche costruzione di grandezze veramente legate le une alle altre da tale rapporto<sup>246</sup>.

Vale dunque per il Libro decimo quanto si era osservato per il secondo: l'irrazionale è un fatto puramente geometrico, che non ha corrispondenza nell'universo numerico. In Euclide troviamo dunque gli esiti maturi di quanto già si era visto in Aristotele: aritmetica e geometria possono condurre esistenze separate, rimanendo legate la prima al discreto, la seconda al continuo. Non vi è in Euclide alcun tentativo di interpretare il numero in senso geometrico, e dunque di elevare gli irrazionali al rango di ἀριθμοί.

245 Ivi, X, 9.

246 L. GEYMONAT, *Storia della matematica*, cit., p. 356.



### **3. Alcune osservazioni sulla teoria delle proporzioni.**

Il Libro quinto degli *Elementi* è dedicato all'esposizione della teoria delle proporzioni: Euclide fa suo, ed espone in modo organico, quanto era stato precedentemente formulato dal grande matematico Eudosso di Cnido. Della sua teoria dei λόγοι e delle proporzioni ho già parlato nel corso del secondo capitolo della mia tesi, intendo qui ritornare sull'argomento per mettere a fuoco quale posto questa teoria occupi all'interno degli *Elementi*, e come in essa si possa trovare conferma di quanto fin qui osservato in merito ai rapporti tra aritmetica e geometria.

Come si ricorderà, Eudosso aveva riformulato i concetti di λόγος e di proporzione, in modo che la teoria fosse applicabile anche agli irrazionali. Si tratta di una teoria applicabile a qualsiasi tipo di grandezza, e dunque, a rigore, essa si adatterebbe anche alle proporzioni che sussistono tra i nostri numeri reali. Si potrebbe quindi essere tentati di vedere, nelle definizioni proposte da Eudosso e rielaborate da Euclide, un primo tentativo di fondare logicamente proprio i numeri irrazionali.

Alla luce di quanto si è visto nella seconda parte di questa ricerca, tuttavia, si può e si deve sottolineare che lo scopo dei due matematici non poteva senz'altro essere questo: al contrario, è evidente che la nuova teoria delle proporzioni era volta a rendere conto dell'esistenza di *grandezze* irrazionali, e a garantire l'esistenza di un λόγος per ogni coppia di grandezze omogenee, a prescindere dalla possibilità che questo λόγος fosse effettivamente esprimibile numericamente. Lungi dall'essere una teoria in grado di giustificare l'esistenza dei numeri irrazionali, dunque, quella proposta da Eudosso ed Euclide vuole appunto aggirare i numeri irrazionali stessi. Ciò è peraltro coerente con una testimonianza di Giamblico, il quale riporta che:

«Il numero è quantità determinata», dice il Pitagorico Eudosso, dopo averne distinto specie e genere<sup>247</sup>.

Ricordo qui che il λόγος tra due grandezze, secondo la formulazione euclidea, poteva essere espresso mediante infiniti λόγοι pitagorici, ossia mediante infinite coppie ordinate di numeri naturali ( $m; n$ ). Sebbene non sia possibile esprimere numericamente il rapporto tra

247 GIAMBILICO, *Sulla introduzione all'aritmetica di Nicomaco*, par. 10.

due grandezze irrazionali, infatti, è sempre possibile stabilire se tale rapporto è maggiore o minore rispetto al rapporto che sussiste tra due interi. Tutti i λόγοι pitagorici  $\frac{m}{n}$  si possono quindi dividere in due gruppi, a seconda che siano maggiori o minori del λόγος che si sta cercando di esprimere. Tale λόγος, dunque, può essere definito come l'elemento di separazione tra le due classi di λόγοι pitagorici individuate.

Tuttavia, è necessario osservare che tale elemento di separazione, pur essendo individuato da due serie infinite e convergenti di λόγοι pitagorici del tipo  $\frac{m}{n}$ , non può in nessun caso essere considerato un λόγος pitagorico esso stesso. Fintantoché si resta all'interno dell'aritmetica, tale elemento di separazione *non esiste*.

Il paradigma eudossiano, che negli *Elementi* sarà esteso al corpus della geometria, aveva potuto assorbire l'irrazionale, senza che ciò implicasse l'introduzione di nuovi tipi di numero e quindi la modificazione del concetto tradizionale di numero<sup>248</sup>.

Che la definizione Euclidea non fosse riferibile ai numeri, risulta evidente nel momento in cui si considera un'altra definizione fondamentale degli *Elementi*: la ventesima del Libro settimo:

[Quattro] numeri sono in proporzione quando, a seconda che il primo sia multiplo, sottomultiplo, o una frazione qualunque del secondo numero, corrispondentemente il terzo sia lo stesso multiplo, o lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione del quarto<sup>249</sup>.

Come si vede, all'interno del primo dei Libri dedicati allo studio delle quantità numeriche, il matematico si preoccupa di fornirci una nuova definizione di proporzionalità, applicabile ai numeri. È, questa, una definizione più semplice rispetto a quella proposta all'interno del Libro quinto, e ne costituisce un caso particolare. Si ricorderà che, per la prima definizione di proporzionalità, occorre che, comunque presi due valori  $m$  ed  $n$ , si realizzasse sempre che:

248 G. CAMBIANO, *Figura e Numero*, cit., p. 90.

249 EUCLIDE, *Elementi*, VII, def. 20.

se  $ma < nb$  allora anche  $mc < nd$

se  $ma = nb$  allora anche  $mc = nd$

se  $ma > nb$  allora anche  $mc > nd$

Secondo questa nuova definizione, invece, è sufficiente che esista una sola coppia di valori  $m$  ed  $n$ , per la quale si realizza che:

se  $ma = nb$  allora anche  $mc = nd$ ,

e tanto basta perché  $a, b, c, d$  siano grandezze proporzionali. È evidente che, se  $a$  è multiplo, sottomultiplo o frazione di  $b$ , allora  $a$  e  $b$  sono necessariamente commensurabili. Si conferma quindi ancora una volta quanto fin qui osservato: il geometrico, regno del continuo, è in grado di ospitare l'irrazionale, e pertanto le grandezze geometriche necessitano di una definizione di proporzionalità più ampia e più complessa rispetto a quella che può essere utilizzata per i numeri, che continuano invece a coincidere con gli interi.

## CAPITOLO 8. LA POSIZIONE PLATONICA: L'APERTURA A UN NUOVO CONCETTO DI NUMERO?

### 1. Le dottrine non scritte: l'Uno e la Diade.

Nelle opere di Platone, a differenza che in quelle di Aristotele e di Euclide, non si trova una teoria del numero formulata in modo esplicito, e non è detto che Platone si sia mai posto il problema di definire puntualmente il concetto di numero. Pertanto, a noi è possibile solamente formulare alcune ipotesi in merito, attraverso l'analisi dei brani matematici contenuti nei dialoghi e nelle testimonianze, soprattutto aristoteliche, che ci sono pervenute. In quest'ultimo capitolo della mia ricerca mi propongo appunto di esaminare i brani e le testimonianze più significative, cercando di mettere a fuoco qualche punto fermo di quella che dovette essere la concezione platonica del numero, tenendo sempre presente che tale concezione non fu probabilmente mai formulata dal filosofo in modo compiuto. In particolare, cercherò di mostrare come l'identificazione del numero con il numero naturale, pur presente nelle opere di questo autore, sia in qualche modo meno stretta rispetto a quanto lo era stata in altri pensatori a lui successivi.

Ritengo che, per comprendere più a fondo i brani matematici di Platone, sia importante leggerli alla luce delle cosiddette “dottrine non scritte”: mi propongo dunque qui di richiamarne brevemente i concetti cardine, senza alcuna pretesa di esaustività, ma con il solo scopo di esplicitare le premesse su cui il resto della mia analisi si basa.

Esistono numerose testimonianze che ci riferiscono di una lezione (o di un ciclo di lezioni) tenuto da Platone sul tema del Bene: i contenuti di tale lezione, riportati da molti autori posteriori a Platone, non trovano tuttavia corrispondenza all'interno dei dialoghi. Molto vivace è il dibattito attorno al ruolo di tali contenuti all'interno del pensiero platonico, e non è senz'altro mia intenzione addentrarmi. È stato ipotizzato che attraverso i dialoghi Platone abbia inteso offrire, esponendo la dottrina delle idee, una spiegazione del mondo diveniente adeguata alla divulgazione, e che tuttavia egli avesse formulato anche una spiegazione in grado di fondare le stesse idee, riservata però ai soli discepoli dell'Accademia

e affidata alla pura oralità<sup>250</sup>.

Per quanto riguarda i contenuti di tale dottrina, riporto una testimonianza Aristotelica:

Poiché, quindi le Forme sono cause delle altre cose, Platone ritenne che gli elementi costitutivi delle forme fossero gli elementi di tutti gli esseri. Come elemento materiale delle forme egli poneva il grande e piccolo, e come causa formale l'Uno<sup>251</sup>.

Poco oltre leggiamo:

Egli ha fatto uso di due sole cause: di quella formale e di quella materiale. Infatti le Idee sono cause formali delle altre cose, e l'Uno è causa formale delle Idee. E alla domanda quale sia la materia avente funzione di sostrato, di cui si predicano le Idee – nell'ambito dei sensibili, – e di cui si predica l'Uno – nell'ambito delle Idee –, egli risponde che è la diade, cioè il grande e il piccolo<sup>252</sup>.

Osserva Giovanni Reale che, in tutta la filosofia greca, domina la convinzione che *spiegare significa unificare*: questo è evidente già a partire dalla filosofia dei Fisici, che cercano di unificare la pluralità del mondo diveniente sotto un unico principio, fino alla filosofia di Socrate, che attraverso la domanda “che cos'è?” chiedeva di riportarsi a concetti unitari ed universali<sup>253</sup>. Anche le dottrine non scritte di Platone potrebbero essere lette in tale ottica: nei dialoghi la molteplicità del reale veniva ricondotta alle idee, le quali, tuttavia, costituivano a loro volta una molteplicità: esse pertanto non potevano rappresentare una spiegazione ultimativa, e richiedevano a loro volta di essere unificate sotto un numero limitato di principi. Tali principi, universalissimi e in grado di rendere conto della molteplicità delle idee, sarebbero appunto l'Uno e la Diade indefinita. È assolutamente evidente che tali principi non possono identificarsi con i numeri uno e due della matematica: essi, al contrario, sono anteriori ai numeri, e, come vedremo in seguito, sono responsabili della loro stessa generazione.

250 Questa, ad esempio, è la posizione assunta dalla Scuola di Tubinga, i cui sforzi vanno nella direzione di rileggere tutta la produzione scritta di Platone alla luce delle dottrine non scritte.

251 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 6, 987 b 18-22.

252 Ivi, A 6, 988 a 8-14.

253 Cfr. G. REALE, *Per una nuova interpretazione di Platone. Rilettura della metafisica dei grandi dialoghi alla luce delle “Dottrine non scritte”*, Vita e pensiero, Milano 1987, p. 224.

Sarebbe errato anche intendere l'Uno e la Diade, analogamente alle idee, come concetti universalissimi, astrazioni delle molteplici manifestazioni della realtà. Al contrario, questi due principi rappresentano cause ontologiche prime: rispettivamente la causa formale e la causa materiale, tanto delle idee, quanto delle cose sensibili<sup>254</sup>.

Con una terminologia tecnica, anche se non usata espressamente da Platone, *potremmo dunque dire che la Diade* (nei suoi più alti gradi) *è una sorta di «materia intellegibile»*, mentre nel suo grado più basso è una sorta di *materia sensibile* [...]. Essa è una molteplicità indeterminata, la quale, fungendo come sostrato all'azione dell'Uno, produce la molteplicità delle cose *in tutte le sue forme*; e, dunque, oltre che Principio di pluralità orizzontale, è anche Principio della gradazione gerarchica del reale<sup>255</sup>.

Esiste, all'interno della produzione scritta di Platone, un brano in cui il filosofo parla del genere dell'*indeterminato* e del genere del *determinato*: tale brano è estremamente significativo, poiché questi due generi sembrano essere riconducibili proprio ai due principi dell'Uno e della Diade. Chiaramente, Platone non accenna mai alla possibilità che il genere del *determinato* e dell'*indeterminato* possano essere intesi come principi primi e come cause ontologiche delle stesse idee; e ciononostante ritengo che un breve esame di questo brano possa essere funzionale ad una migliore comprensione della natura dei Principi.

Il passo a cui mi sto riferendo è contenuto all'interno del *Filebo*: Socrate si occupa di rintracciare, tra gli enti, un *elemento determinante* ed una *indeterminazione*, ed oltre a queste due, un *genere commisto*.

In primo luogo, viene descritto il genere dell'*indeterminato*:

Innanzitutto vedi se ti è possibile pensare, a proposito del più caldo e del più freddo, un qualche limite, oppure se il più e il meno che sono presenti in questi generi, essendo presenti non permetterebbero che vi si generi un termine<sup>256</sup>.

Socrate si sta qui riferendo a tutto ciò che ammette indefinite variazioni di grandezza, ossia a scale di valori continue. Il genere del *determinato*, invece, viene descritto con queste parole:

254 Cfr. K. GAISER, *La dottrina non scritta di Platone*, cit., p. 18.

255 G. REALE, *Per una nuova interpretazione di Platone*, cit., p. 233.

256 PLATONE, *Filebo* 24 a-b.

Le realtà che [...] accettano [...] l'uguale e l'uguaglianza, e dopo l'uguale il doppio e tutto quello che sia un numero in rapporto ad un numero o una misura in rapporto ad una misura<sup>257</sup>.

Sebbene occorra andare molto cauti prima di parlare di una vera e propria identificazione, è senz'altro vero che l'Uno e la Diade possono essere meglio compresi nella loro essenza se pensati in analogia, rispettivamente, al genere del determinato e dell'indeterminato. Solo dall'azione dell'Uno sulla Diade possono nascere le determinate idee e gli enti, così come, introducendo un elemento determinante all'interno dell'indeterminato, si ottiene un che di commisto, che è sempre anche un che di determinato:

Nel mescolare queste cose, ne derivano, in ciascuna mescolanza, determinate generazioni<sup>258</sup>.

Socrate si sta dunque riferendo all'azione del determinato, e quindi dell'Uno, il quale, per così dire, “taglia” la scala del continuo, producendo una grandezza determinata. In un esempio, per dirla con Taylor,

La temperatura è un ἄπειρον, 20° è un πέρας, una temperatura di 20°C è un esempio della «mescolanza»; pioggia è un ἄπειρον, 6 è un πέρας, ma 6 pollici di pioggia è un μεικτόν<sup>259</sup>.

È interessante rilevare come esista un'evidente affinità tra la dottrina esposta in questo brano del *Filebo*, e la dottrina dei principi dei cosiddetti Pitagorici. Come si ricorderà, infatti, questi ultimi avevano posto a fondamento della realtà un principio doppio: limite / illimito, dove il primo corrispondeva al dispari e all'uno, il secondo al pari e al molteplice.

L'Uno di Platone ha [...] lo stesso ruolo attribuito dal pensiero pitagorico al Limite, di porre limiti al ridursi e al crescere delle quantità, riconducendola alla fissità e all'uguaglianza. Anche il principio del grande e piccolo, nonostante la dualità del nome, non è nient'altro che l'illimito dei Pitagorici: fu nominato dualisticamente perché

257 Ivi, 25 a-b

258 Ivi, 25 e.

259 A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., p. 643.

connotava allo stesso modo le possibilità di proseguire infinitamente nella direzione della crescita e nella direzione della riduzione<sup>260</sup>.

## **2. Il numero nelle dottrine non scritte.**

### ***La generazione dei numeri dall'Uno e dalla Diade.***

Dalle dottrine non scritte risulta che, assieme alle idee, anche i numeri sono originati dall'azione dell'Uno sulla Diade. Va precisato che, da alcune testimonianze, sembra che siano solamente i numeri a generarsi dall'azione dei due principi, mentre altri brani sembrano suggerire che tale processo di generazione coinvolga anche le grandezze geometriche. Aristotele ci riporta:

[Platone] infatti riteneva che le Forme <e> i numeri derivassero per partecipazione del grande e del piccolo all'Uno<sup>261</sup>.

E, poco oltre:

L'aver posto una diade come natura opposta all'Uno fu al fine di poter fare derivare da essa, in modo facile, come da una matrice, tutti i numeri, tranne quelli primi<sup>262</sup>.

L'Uno agirebbe come causa della determinatezza e dell'individualità di ciascun numero, mentre la Diade, capace di infinite variazioni, sarebbe responsabile della diversità dei numeri stessi. Come di preciso questa generazione possa avere luogo non è chiaro, tuttavia è stato possibile formulare alcune ipotesi: ne riporto due, a titolo principalmente esemplificativo. Vittorio Hösle, nella sua ricostruzione, fa riferimento ad una testimonianza di Sesto Empirico:

Da questi due principi, essi dicono, derivano l'uno che è nell'ambito dei numeri e poi la dualità che è pure nell'ambito dei medesimi: dalla prima unità l'uno, dall'unità e dalla dualità indeterminata i due. Infatti, due volte uno fa due, e finché non sussisteva

260 J. N. FINDLAY, *Platone. Le dottrine scritte e non scritte*, cit., p. 54.

261 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 6, 987 b 21-22.

262 Ivi, A 6, 987 b 34-988 a 1.



nell'ambito dei numeri il due, non c'era nemmeno in questi il due volte, ma esso fu preso dalla dualità indefinita, e così da questa e dall'unità derivò la dualità che è nell'ambito dei numeri. Nello stesso modo anche gli altri numeri furono prodotti da questi due principi, fungendo l'uno sempre da principio delimitante e generando la dualità indeterminata sempre due, ed estendendo così i numeri a quantità infinita<sup>263</sup>.

Dunque, dall'Uno si genererebbe il numero uno (che questi non siano identici dovrebbe ormai essere evidente), e da questo, attraverso l'azione della Diade, verrebbero all'essere anche tutti gli altri numeri<sup>264</sup>. Un'altra ipotesi di spiegazione è stata formulata da Julia Annas, la quale si riferisce ad un brano del *Parmenide* (142 b-144), e soprattutto ad una testimonianza aristotelica:

In un primo modo, quando l'Uno opera su un numero pari, si produce il dispari; in un secondo modo, quando opera la diade, si produce il numero pari, a partire dall'uno raddoppiato; in un terzo modo, quando operano i numeri dispari, si originano gli altri pari<sup>265</sup>.

Da questi due brani, la studiosa deduce che, con ogni probabilità, la Diade, da sola, poteva essere in grado di generare solamente le potenze del due, attraverso un processo di infinita duplicazione:  $1 \cdot 2 = 2$ ,  $2 \cdot 2 = 4$ ,  $4 \cdot 2 = 8$ , e così via. È chiaro che in questo modo si possono ottenere solamente numeri della forma  $2^n$ . La testimonianza di Aristotele, tuttavia, suggerirebbe un modo in cui anche gli altri numeri potrebbero venire all'essere: a partire dalle potenze del 2, l'Uno potrebbe generare i numeri dispari, dopodiché, a partire dai numeri fin qui ottenuti, sarebbe possibile ottenere i restanti numeri pari<sup>266</sup>.

Ad ogni modo, le testimonianze a nostra disposizione non sono univoche, e gli studiosi non sono unanimi nella loro interpretazione. Ciò che invece risulta come una costante nelle testimonianze è che i numeri, per Platone, hanno una vera e propria *generazione*: Aristotele, ad esempio, utilizza sistematicamente il verbo “generare”, il quale, appunto, si riferisce ad un vero e proprio venire all'essere<sup>267</sup>. Platone, dunque, fece uso di un

263 SESTO EMPIRICO, *Contro i matematici*, X 248-83. Per la traduzione di questo passaggio ho fatto riferimento a quella proposta da J. FINDLAY in *Platone. Le dottrine scritte e non scritte*, cit., p. 415. Sebbene qui Sesto empirico si stia riferendo ai Pitagorici, esistono forti indizi che in realtà le teorie esposte siano attribuibili a Platone stesso, o comunque ai suoi seguaci.

264 Cfr. V. HÖSLE, *I fondamenti dell'aritmetica e della geometria in Platone*, Vita e pensiero, Milano 1994, p. 60

265 ARISTOTELE, *Metafisica*, M 8, 1084 a 4-7.

266 Cfr. J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., pp. 85-92.

267 L'uso del verbo "generare", ad esempio, si riscontra in *Metafisica*, 987 b 22-35; 1082 b 30; 1087 b 7; 1091 a 4-5.

linguaggio “temporale” e “biologico”, il quale è estremamente significativo. Osserva Höhle a tal proposito:

Il fatto che vi siano numeri naturali è indimostrabile con mezzi matematici; la loro esistenza può essere posta solo assiomaticamente. In questo senso, si potrebbe dire che la concezione platonica di generazione dei numeri non era intesa a nient'altro, se non a fornire una fondazione filosofica dei numeri naturali<sup>268</sup>.

### ***Enti matematici ideali ed enti matematici intermedi.***

Fanno parte della dottrina non scritta di Platone anche alcune affermazioni relative allo statuto ontologico degli enti matematici. Anche in questo caso, Aristotele è una fonte preziosa. Nella *Metafisica*, in particolare, leggiamo:

[Platone] afferma che, accanto ai sensibili e alle Forme, esistono Enti matematici «intermedi» fra gli uni e le altre, i quali differiscono dai sensibili perché immobili ed eterni, e differiscono dalle Forme perché ve ne sono molti simili, mentre ciascuna Forma è solamente una e individua<sup>269</sup>.

È necessario ammettere un secondo genere di numero: quello di cui tratta l'aritmetica, e tutti quegli oggetti che alcuni denominano «intermedi»<sup>270</sup>.

Più avanti, poi, egli fa riferimento a:

Coloro che per primi posero l'esistenza di due tipi di numero: il numero ideale e il numero matematico<sup>271</sup>.

Dunque, sembrerebbe che nella teoria di Platone trovino posto due diversi tipi di enti matematici. I primi sarebbero a tutti gli effetti idee, nel senso più pieno che Platone attribuisce al termine: essi sarebbero pertanto unici ed immutabili. Annas suggerisce che Platone potrebbe aver attribuito ai numeri ideali le caratteristiche delle altre idee: come l'idea di bellezza è, assieme, causa della bellezza e oggetto estremamente bello, così il Due

268 V. HÖHLE, *I fondamenti dell'aritmetica e della geometria in Platone*, cit., p. 49.

269 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 6, 987 b 14-18.

270 Ivi, A 9, 991 b 27-29.

271 Ivi, N 3, 1090 b 32-33.

ideale sarebbe assieme la proprietà caratteristica di tutte le paia di cose, ed assieme sarebbe un paio perfetto<sup>272</sup>.

È del tutto evidente, tuttavia, che, se i numeri ideali hanno le stesse caratteristiche delle idee, è impossibile operare su di esse. Ogni idea, infatti, è unica ed immutabile: è chiaro, quindi, che operazioni del tipo  $2 + 2 = 4$  non possono riferirsi ai numeri ideali. D'altra parte, le operazioni e le costruzioni matematiche non possono nemmeno riferirsi alla realtà empirica: esse appartengono ad un livello della conoscenza intermedio tra la conoscenza sensibile e la pura contemplazione delle idee. Questo livello di conoscenza, secondo le testimonianze di Aristotele, troverebbe un corrispettivo, appunto, in enti matematici intermedi: immobili ed eterni come le idee, e tuttavia molteplici.

Che Platone abbia effettivamente sostenuto l'esistenza di enti matematici intermedi, è un fatto che non trova alcun tipo di riscontro all'interno dei dialoghi. Si trova, è vero, il riferimento ad un grado di sapere intermedio tra la vera scienza e l'opinione, sapere il cui oggetto è appunto la matematica; e tuttavia non vi è alcun indizio che a tale sapere intermedio debba corrispondere anche un oggetto ontologicamente intermedio tra idee e sensibili.

La questione relativa alla paternità platonica della teoria degli Enti matematici intermedi è stata lungamente dibattuta, e non è senz'altro mia intenzione addentrarmi in questa sede<sup>273</sup>, ad ogni modo oggi gli studiosi sono perlopiù unanimi nell'accettare come platonica questa teoria, e si dividono al più in merito alla possibilità di trovare nei dialoghi una conferma di quanto riportato da Aristotele.

Ciò che invece trova chiara conferma nei dialoghi è che gli enti matematici, comunque essi siano intesi, incontrovertibilmente *esistono*.

«Certo, noi poniamo il numero, nel suo insieme, tra gli enti».

«Sì, almeno se mai altro si deve porre come ente»<sup>274</sup>.

Essi, perfetti ed immutabili, appartengono ad un livello ontologico superiore a quello del mondo fisico, anteriori e separati dalle cose sensibili. Il loro essere è, dunque, del tutto

272 Cfr. J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 47.

273 Una buona ricostruzione del dibattito in merito è si trova in E. CATTANEI, *Enti matematici e metafisica*, cit., pp. 130 e seg.

274 PLATONE, *Sofista*, 238 a-b.

indipendente dalla coscienza che l'uomo ha di essi: vi è su questo punto un'incolmabile distanza dalla posizione di Aristotele, che faceva derivare i numeri proprio dalla facoltà umana di fare astrazione.

### **3. Il numero come numero naturale.**

Passerò ora ad esaminare più nello specifico i brani platonici e le testimonianze relative alle caratteristiche del numero, ricercandovi in particolare elementi che possano suggerire una risposta alla domanda: anche Platone concepì il numero solamente come numero intero?

È stato più volte sostenuto che Platone avesse una concezione del numero molto più ampia rispetto ai suoi contemporanei, e vicina alla concezione moderna: secondo questa interpretazione, egli sarebbe riuscito nello sforzo di aritmetizzare la geometria, e non solo di geometrizzare l'aritmetica; pertanto anche le quantità irrazionali avrebbero a pieno diritto lo statuto di ἀριθμοί. Tuttavia, all'interno dei dialoghi non sembra esservi evidenza di ciò; al contrario, vi è abbondanza di passi che testimoniano come Platone ricalcasse perlopiù le posizioni dominanti in materia.

Innanzitutto, troviamo più di un passaggio in cui Platone definisce esplicitamente l'unità come un indivisibile. Nel capitolo quinto ci si è già riferiti ad un brano del *Parmenide* (137 c-d), in cui Platone argomentava per mostrare come l'uno dovesse essere detto assolutamente privo di parti. Ritroviamo un'affermazione analoga, ad esempio, nel *Sofista*:

Il veramente uno deve essere detto del tutto privo di parti<sup>275</sup>.

Pensare che l'unità sia divisibile è, per il matematico, semplicemente ridicolo:

I matematici esperti non accettano, facendogli fare una magra figura, chi s'avventura a dividere nel ragionamento l'uno in quanto tale; e più tu lo dividi più loro lo moltiplicano, per impedire che l'uno perda la sua unità e appaia molteplice<sup>276</sup>.

275 Ivi, 245 a.

276 PLATONE, *Repubblica*, Libro VII, 525 d-e. Su questo passo, cfr E. CATTANEL, *Enti matematici e metafisica*, cit., p. 106 e I. TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., p. 77.

Nel *Filebo*, invece, leggiamo:

Di quelli che si occupano del numero, gli uni contano in certo qual modo unità diseguali, come due eserciti, due buoi, due oggetti qualsiasi, i più piccoli oppure anche i più grandi di tutti; gli altri, invece, non lo seguirebbero mai, a meno che non si supponga che nessuna delle innumerevoli unità sia diversa da un'altra unità<sup>277</sup>.

Platone ammette quindi che per contare i matematici utilizzano pure unità: questo sembrerebbe essere un richiamo alla tradizionale definizione, a noi ormai nota, del numero come composto da unità indivisibili. A proposito di questo brano, Julia Annas fa due osservazioni, a mio avviso molto pertinenti. In primo luogo, rileva in Platone una certa confusione tra il contare intransitivo (ossia il *ripetere la serie numerica* “uno”, “due”, “tre”...) e il contare transitivo (ossia l'utilizzare i simboli numerici per misurare insiemi di cose). In secondo luogo, mette in evidenza come Platone dia per scontato che *numero* sia necessariamente *numero di qualcosa*: per il filosofo, esso è numero di pure unità<sup>278</sup>.

Quanto rilevato sul concetto platonico di unità trova conferma in un brano, già citato, di Aristotele:

Anche Platone [...] concepì due infiniti, perché sembra che ci sia un superamento e un processo verso l'infinito sia per accrescimento sia per diminuzione. Ma, pur avendo ammesso due infiniti, egli non ne fa uso: infatti, secondo lui, nei numeri non esiste affatto l'infinito per detrazione, perché la monade è il minimo, né per aggiunzione, perché egli concepisce il numero fino alla decade<sup>279</sup>.

Come si è già avuto modo di vedere nei capitoli precedenti, nel momento in cui si pensa il numero come una somma di unità, è possibile dividere i numeri in due metà: i pari ed i dispari; l'unione di questi restituisce la totalità dei numeri. E, appunto, si ritrovano nei dialoghi numerosi passaggi nei quali i numeri vengono suddivisi in pari e dispari: questo confermerebbe l'ipotesi per cui il numero, anche in Platone, sarebbe ricondotto ad insieme di unità:

L'aritmetica è la scienza del pari e del dispari<sup>280</sup>.

277 PLATONE, *Filebo* 56 d-e

278 Cfr. J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 41.

279 ARISTOTELE, *Fisica*, III 6 206 b 27-33.

280 PLATONE, *Carmide*, 166 a.

Il dispari è parte del numero, sicché non dovunque c'è il numero c'è anche il dispari, mentre dove c'è il dispari c'è anche il numero<sup>281</sup>.

Il tre, [...] il cinque e l'intera metà della serie dei numeri, se anche non sono la stessa cosa che il dispari, tuttavia ciascuno di essi è sempre dispari. E così, parimenti, il due e il quattro e tutta l'altra serie di numeri, se anche non sono la medesima cosa che il pari, pure, ciascuno di essi, è sempre pari.<sup>282</sup>

«Se ciascuno di questi è Uno, aggiungendone uno qualsiasi a una qualsiasi coppia, non diventa forse tre il tutto? »

«Sì.»

«Il tra non è dispari e il due pari?»

«Come no!»

«E che? Se c'è il due, non deve necessariamente esserci il due volte, e se c'è il tre il tre volte, se è proprio del due essere due volte uno, e del tre essere tre volte uno?»

«È necessario che sia così.»

«Ma essendoci il due e il due volte, non è necessario che ci sia il due volte due? Ed essendoci il tre e il tre volte, non è necessario che ci sia anche il tre volte tre?»

«Come no!»

«E allora? Essendoci il due e il tre volte, e il tre e il due volte, non è necessario che ci sia il due volte tre e il tre volte due?»

«Assolutamente necessario.»

«Ci saranno dunque prodotti di due numeri pari e prodotti di due numeri dispari, e prodotti di un pari per un dispari e di un dispari per un pari. »

«È così.»<sup>283</sup>

Quest'ultimo brano, in particolare, è significativo in quanto in esso si riprende la tradizionale suddivisione, presente anche negli *Elementi*, tra numeri parimente pari, parimenti dispari e disparimente dispari. L'attribuzione a Platone di un concetto di numero simile a quello pitagorico sarebbe, peraltro, coerente con le testimonianze aristoteliche esaminate nello scorso paragrafo; si ricorderà, ad esempio, che nella *Metafisica* la Diade era presentata come un principio in grado di originare *tutti i numeri, tranne quelli primi*<sup>284</sup>: è del tutto evidente che una tale espressione presuppone che ci si riferisca solamente ai numeri naturali. Anche tutte le altre testimonianze in merito alla generazione dei numeri, e tutte le loro ipotesi interpretative, rendono conto solo della generazione della sequenza dei numeri interi.

281 PLATONE, *Eutifrone*, 12 c.

282 PLATONE, *Fedone*, 104 a-b.

283 PLATONE, *Parmenide*, 143 d-144 a.

284 ARISTOTELE, *Metafisica*, A 6, 987 b 34-988 a 1.

Anders Wedberg propone un'ipotesi riguardo al modo in cui Platone potrebbe aver considerato i numeri:

La definizione del numero N come un certo insieme designato a contenere N elementi è una ragionevole alternativa alla definizione del numero N come una proprietà predicabile di tutti gli insiemi che contengono N elementi. [...] Una definizione che identifica i numeri con tali insiemi sembra inoltre giustificare perfettamente l'uso dei numeri all'interno di frasi come ad esempio "Socrate e Gorgia sono 2 uomini". Anziché interpretare questa frase come se significasse "L'insieme che ha come elementi gli uomini Socrate e Gorgia ha proprietà 2", noi possiamo intenderla nel senso seguente: "L'insieme che ha come elementi gli uomini Socrate e Gorgia può essere correlato uno-ad-uno con l'insieme in cui consiste il numero 2"<sup>285</sup>.

Vorrei ora tornare brevemente sul brano del *Menone* esaminato nel secondo capitolo. Come si ricorderà, Socrate, nell'intento di dimostrare che *conoscere* significa *ricordare*, aveva portato uno schiavo, ignorante in materia matematica, a determinare il lato di un quadrato avente area di 8 piedi quadrati a partire da un quadrato di area 4 piedi quadrati. Evidentemente, tale lato è incommensurabile con l'unità di misura di *un piede*: noi diremmo che esso misura  $2\sqrt{2}$  piedi. Inizialmente, Socrate chiede al ragazzo di indicare la *misura* del lato cercato: si ricorderà che *misurare* significa confrontare con un'unità di misura: un segmento irrazionale, a rigore, per l'uomo greco non ha misura, dal momento che non è possibile indicare con un numero (naturale) quante volte l'unità, razionale, vi è contenuta.

Infatti, fintantoché Socrate insiste nel chiedere al ragazzo di determinare la misura del lato, il problema sembra insolubile, e tutte le misure proposte si rivelano sempre in eccesso o in difetto rispetto al valore cercato. Socrate, quindi, invita il ragazzo, se non riesce ad individuare la misura del lato, almeno ad *indicare col dito* il segmento cercato: il problema, a questo punto, trova immediatamente soluzione, dal momento che il lato cercato è proprio la diagonale del quadrato di lato 4 piedi quadrati. In altre parole, qui Socrate abbandona la via aritmetica, rinunciando a determinare un valore numerico, ed intraprende la via geometrica: tanto basta perché il problema, apparentemente impossibile, trovi un'immediata e semplice soluzione.

Sembra quindi che, anche in Platone, si possa riscontrare la difficoltà, già ampiamente rilevata in altri autori, a tenere assieme aritmetica e geometria: i valori numerici, in questo

285 ANDERS WEDBERG, *Plato's Philosophy of Mathematics*, Stockholm 1955, pp. 24-25, citato in J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., pp. 47-48.

brano, rivelano la loro inadeguatezza a rendere conto della realtà geometrica. Si confermerebbe, dunque, quanto fin qui ipotizzato, ossia che anche per Platone il numero si riduca a essere solamente numero intero: non vi sarebbe altrimenti alcuna difficoltà ad esprimere numericamente la *misura* di un segmento irrazionale<sup>286</sup>.

Osserva Imre Toth che anche le scelte lessicali di Platone rivelano la discrepanza tra piano aritmetico e piano geometrico. Fintantoché Socrate sta descrivendo il quadrato di partenza (avente lato di 2 piedi), egli utilizza, per riferirsi alla misura dei suoi lati, il termine *ποσόν*, che indica una quantità esplicitamente numerica. Tuttavia, non appena l'oggetto del suo interrogare si sposta sul quadrato di area otto piedi quadrati, egli smette di utilizzare *ποσόν*, e lo sostituisce con *πῆλιξη*: quest'ultimo è un termine più vago, che designa una proprietà quantitativa dell'oggetto in questione. Tale discontinuità linguistica è notevole, e rappresenta un chiaro segnale che i valori irrazionali non possono in alcun modo appartenere all'universo dei numeri<sup>287</sup>.

#### **4. Un'apertura a un nuovo concetto di numero?**

Se esistono nei dialoghi così tanti e così chiari segnali che il numero va pensato come numero intero, allora come mai tanto spesso è stato attribuito a Platone un concetto di numero simile a quello moderno? Senz'altro, egli ebbe una conoscenza molto puntuale dell'irrazionale geometrico: il brano del *Menone* poco sopra esaminato sembra essere una conferma di ciò.

Esistono tuttavia, all'interno della dottrina scritta e non scritta di Platone, alcuni indizi del fatto che l'irrazionale potrebbe essere stato inteso in senso non solo strettamente geometrico, e che l'identificazione del numero con il numero naturale potrebbe essere stata per il nostro filosofo meno stretta rispetto a quanto si è visto negli altri autori fin qui esaminati. In altre parole, si potrebbe ipotizzare che la cesura tra aritmetica e geometria, che l'incommensurabilità aveva imposto come inevitabile, non fosse in Platone così netta e categorica, come lo era, ad esempio, in Aristotele. Le ragioni di questo fatto sono senz'altro

286 Cfr. ATTILIO FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, cit., p. 109.

287 Cfr. I. TOTH, *Lo schiavo di Menone, Il lato del quadrato doppio, la sua misura non misurabile, la sua ragione irrazionale. Commento a Platone, 82 b-86 c.* Vita e pensiero, Milano 1998, pp. 14-17.



molteplici, mi preme tuttavia osservare che Platone, rispetto ad Aristotele, opera con una generazione di anticipo, e quindi in un momento in cui, verosimilmente, la rottura dell'aritmo geometria non si era ancora imposta come l'unica soluzione possibile alle aporie generate dalla scoperta dell'incommensurabilità.

Ad ogni modo, abbiamo a nostra disposizione solamente indizi per ipotizzare che Platone abbia accolto l'irrazionale nell'aritmetica: senz'altro insufficienti ad attribuire a Platone una teoria del numero tanto rivoluzionaria, essi meritano comunque di essere attentamente esaminati; come una lente, sono in grado di mostrare con maggior nitidezza la profondità e la complessità del pensiero matematico platonico.

### ***Epinomide, 990 d.***

Il primo e più importante di questi indizi è un brano dell'*Epinomide*, nel quale cui viene fornita la seguente definizione di *geometria*:

Data per acquisita questa scienza [la scienza dei numeri], è la volta di quell'altra che con un nome un po' buffo vien chiamata geometria. Siccome non tutti i numeri risultano per sé fra loro commensurabili, essa, traducendoli nelle corrispondenti superfici piane, ne evidenzia la commensurabilità: certo che questa dimostrazione, per chi è in grado di comprenderla, appare come il prodotto miracoloso di una mente non umana, ma divina<sup>288</sup>.

Due numeri, secondo una definizione di origine pitagorica, sono detti simili quando risultano da fattori proporzionali. Ad esempio,  $24 = 4 \cdot 6$  e  $54 = 6 \cdot 9$  sono simili poiché  $4 : 6 = 6 : 9$ . Essi possono essere rappresentati geometricamente come due rettangoli, che risulteranno essere, appunto, simili. Due numeri non simili, come ad esempio  $10 = 2 \cdot 5$  e  $6 = 2 \cdot 3$ , saranno invece rappresentabili come due rettangoli non simili. Tuttavia, anche due aree rettangolari di questo tipo possono essere rese simili attraverso la *quadratura*. È, questo, un procedimento geometrico, senz'altro noto a Platone, attraverso il quale, in un numero finito di passaggi, era possibile trasformare una qualsiasi area rettangolare in un'area quadrata equivalente: va da sé che, nel caso di aree non esprimibili con numeri quadrati, la quadratura produce quadrati geometrici aventi i lati irrazionali.

288 PLATONE, *Epinomide*, 990 d.

Nel passo sopra citato, Platone allude chiaramente alla quadratura, e tuttavia egli fa riferimento al *prodotto miracoloso di una mente non umana, ma divina*, per cui si avrebbe un *numero* il cui quadrato aritmetico è uguale ad un numero non quadrato: un'entità di tale genere, tuttavia, sarebbe proprio ciò che noi chiamiamo *numero irrazionale*. In questo brano, dunque, sarebbe contenuta un'affermazione decisamente rivoluzionaria: in esso infatti sembra che si possa trovare, per la prima volta nella storia del pensiero matematico greco, il riferimento ad un ente matematico irrazionale a cui viene conferito lo statuto di ἀριθμός.

Molti studiosi, basandosi su questo passo, hanno attribuito a Platone il merito di aver elaborato una concezione del numero del tutto nuova, potremmo dire *geometrica*, in grado di accogliere le quantità irrazionali nell'aritmetica esattamente com'erano state accolte nella geometria. In altre parole, Platone sarebbe riuscito nello sforzo di aritmetizzare la geometria, e sarebbe così stato in grado di salvare il legame originario tra numero e figura, che la scoperta dell'irrazionalità sembrava aver definitivamente compromesso<sup>289</sup>.

Occorre tuttavia procedere con cautela nei confronti di questo passo. In primo luogo, si tratta dell'unico punto, in tutta la produzione scritta di Platone, in cui agli irrazionali viene conferito lo statuto di *numero*. In secondo luogo, la paternità dell'*Epinomide* è perlomeno dubbia, sebbene le dottrine che vi sono esposte siano chiaramente platoniche. Infine, anche volendo prestare fede a questo brano ed ammettere che esso rispecchi effettivamente le posizioni di Platone, ci si scontra inevitabilmente con l'ambiguità del testo, che si presta ad essere letto in più modi. Addirittura, esso potrebbe essere interpretato in modo tale da non dover per nulla ammettere che gli irrazionali siano numeri. Il significato del testo potrebbe infatti essere: dati due numeri non simili, come ad esempio 2 e 3, è possibile, *grazie alla geometria*, evidenziarne la similitudine; essi infatti possono essere tradotti in *superfici* rettangolari che a loro volta possono poi essere quadrate, ed essere così rese simili. Valori che aritmeticamente *non possono essere simili*, possono invece essere pensati anche come simili *solo grazie al tramite della geometria*.

Se il brano dell'*Epinomide* non è sufficiente ad attribuire a Platone una concezione nuova e rivoluzionaria del numero, esso costituisce perlomeno uno stimolo a ricercare

289 Di questo avviso sono, ad esempio, A. E. Taylor e J. Findlay. I. Toth propone un'interessante analisi di *Epinomide* 990 d, in cui si occupa di mostrare come il brano implichi l'esistenza dell'irrazionale anche a livello aritmetico. Cfr. I. TOTH, *Lo schiavo di Menone*, cit., pp. 29-32.

ulteriori indizi, e soprattutto le possibili premesse di questa stessa concezione. Vorrei tornare un'ultima volta su *Menone*, 82 a-85 b, in particolare sul problema, estremamente significativo, posto inizialmente da Socrate. Si richiede infatti di trovare la *misura* del lato del quadrato di area otto piedi quadrati, ossia un valore che dev'essere *numerico*, o comunque riducibile a numeri, in grado però di restituire il numero 8 se elevato al quadrato: quello che viene cercato, pur senza successo, sarebbe proprio un *numero irrazionale*. E se tale numero non viene trovato, è innegabile che nella richiesta di Socrate si manifesti perlomeno una sorta di tensione verso questo numero impossibile.

### ***La Diade e l'irrazionale.***

Ritengo sia significativo, a questo punto, ritornare brevemente sui due Principi responsabili della generazione dei numeri, e in particolare sul ruolo e sulle caratteristiche della Diade: essa infatti, come mi occuperò di mostrare, sembra essere legata al continuo, e quindi in qualche modo anche all'irrazionale.

All'interno della produzione scritta di Platone, il punto in cui si fa riferimento in modo più chiaro e più esplicito al ruolo della Diade è il brano, già citato, del *Filebo* (24 a-25 a), in cui il filosofo parla del genere dell'*indeterminato*: questo sarebbe infatti un corrispettivo della Diade, che ne ricalca in tutto e per tutto il ruolo e il funzionamento. Come si è visto, l'*indeterminato* è quel genere che si ritrova in tutte le scale di valori continui, come ad esempio la temperatura: queste possono essere, per così dire, *tagliate*, *sezionate* dal determinato, ed è in questo modo che si produce il genere *commisto*.

Anche se Platone non fa riferimento a questa possibilità, è chiaro che in questo modo possono originarsi anche le grandezze geometriche, comprese le irrazionali. Che lo spazio geometrico sia pensato da Platone come un continuo è cosa che mi sono già occupata di mostrare in precedenza, e pertanto, utilizzando il brano del *Filebo* come chiave di lettura, si può dire che esso appartiene al genere dell'*indeterminato*: il determinato, agendo su di esso, dà origine a segmenti aventi una ben precisa lunghezza, che può essere tanto razionale, quanto irrazionale, come il lato del quadrato doppio del *Menone* o le grandezze descritte in *Teeteto*, 147 c-148 b.

Queste osservazioni assumono particolare rilevanza quando si consideri che la Diade è, per ammissione di Platone, direttamente responsabile della generazione non solo delle

grandezze geometriche, ma anche dei numeri. Dedurre da questo che i numeri formino un continuo è probabilmente azzardato, e tuttavia è difficile pensare che questa analogia sia esito di una mera coincidenza, o di una grossolanità nel pensiero platonico. Vittorio Hösle suggerisce che, dietro a questa analogia, si manifesti un'importante intuizione, ossia:

Il pensiero per cui fra i numeri naturali e le altre grandezze non sussiste una profonda cesura, ma un nesso da cogliersi in modo puramente aritmetico<sup>290</sup>.

Vorrei a questo punto sottolineare come il processo di “sezionamento” del *continuo* da parte del determinato presenti delle analogie con il “sezionamento” della serie dei λόγοι pitagorici attraverso il quale Eudosso determinava un λόγοι irrazionale<sup>291</sup>. Anche i numeri razionali (o, più propriamente, i λόγοι pitagorici) formano infatti un continuo<sup>292</sup>; attraverso il procedimento descritto da Eudosso-Euclide, è possibile individuare un λόγοι irrazionale praticando una vera e propria *sezione* in questo continuo, un “taglio” che separa le frazioni minori dalle maggiori rispetto al λόγοι da individuare.

Che Platone avesse una certa dimestichezza con questo concetto di sezione è cosa estremamente verosimile, se si considera che nei suoi testi vi sono dei riferimenti alla cosiddetta “sequenza delle diagonali effabili”: come si è visto, i valori che fanno parte di questa sequenza individuano  $\sqrt{2}$  stringendone il valore inafferrabile tra due serie convergenti, con un procedimento del tutto analogo a quello con cui Eudosso individuava un valore irrazionale sezionando il *continuum* dei λόγοι pitagorici. Non è pertanto infondata l'ipotesi che l'azione del determinato sull'indeterminato (o dell'Uno sulla Diade) ricalcasse il processo eudossiano di individuazione dei rapporti irrazionali.

A partire da questa osservazione, Taylor arriva addirittura a sostenere che la Diade fosse stata pensata da Platone come capace di generare anche i numeri irrazionali. Nel passo dell'*Epinomide*, egli scorge gli elementi per attribuire a Platone l'idea di un *continuum* di numeri reali e, come si è visto, il concetto di continuo è indissolubilmente legato all'operato

290 V. HÖSLE, *I fondamenti dell'aritmetica e della geometria in Platone*, cit., p. 66.

291 Questa analogia è rilevata anche in V. HÖSLE, *I fondamenti dell'aritmetica e della geometria in Platone*, cit., pp. 65-66.

292 Date due frazioni qualsiasi, infatti, è sempre possibile individuare una terza frazione compresa fra di esse. È sempre possibile, ad esempio, sommarle e dividere il risultato a metà: si ottiene così una nuova frazione che, essendo la media aritmetica tra le due di partenza, si trova di necessità compresa fra di esse.

della Diade. La presenza nei dialoghi di riferimenti alla sequenza delle diagonali effabili, a questo punto, completa un quadro coerente, e fornisce la chiave per definire il processo di generazione dei numeri irrazionali. Le continue oscillazioni tra eccessi e difetti prodotte dalla sequenza, infatti, rispecchierebbero perfettamente le oscillazioni della Diade: il fatto che queste oscillazioni avvengano all'interno di un *continuum* di numeri reali fa sì che esse possano individuare, appunto, un *numero* irrazionale<sup>293</sup>.

Chiaramente, questa ipotesi interpretativa si basa sull'ammissione che in Platone si possa parlare di un *continuum* di numeri reali: la presenza di tale *continuum*, tuttavia, è dedotta da Taylor solamente dal brano dell'*Epinomide*, e confermata dalle osservazioni sulla Diade e sulle sue oscillazioni. Se non vi è motivo di escludere a priori tale ipotesi, mi sembra che non vi siano nemmeno elementi sufficienti per avvalorarla; essa resta tuttavia estremamente significativa, se non altro perché in essa vengono evidenziati alcuni tratti sorprendentemente moderni del pensiero matematico di Platone.

### ***Numeri e unità.***

Si è visto che, in altri pensatori, ricorre la definizione di numero come somma di unità: mi sono occupata nei capitoli precedenti di mostrare come una simile definizione stia alla base dell'incapacità di concepire come numeri anche gli irrazionali. Anche Platone, talvolta, si richiama a questo stesso modo di pensare i numeri, ad esempio in un passo, già citato, del *Filebo* (56 d-e), in cui si afferma che quando si conta si conta sempre qualcosa, e che i matematici in particolare contano pure unità. Tuttavia, è ipotizzabile che in Platone tale legame tra il numero e l'unità, pur innegabilmente presente, si declinasse in modo diverso, e meno rigido, rispetto a quanto avveniva, ad esempio, in Aristotele o in Euclide. Nella *Metafisica* leggiamo:

Ma se l'Uno è principio, è necessario che i numeri siano piuttosto come diceva Platone, e che ci sia una Diade prima e una Triade prima e che i numeri non siano combinabili fra loro<sup>294</sup>.

E, nell'*Etica Nicomachea*:

293 Cfr A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., pp. 786-789.

294 ARISTOTELE, *Metafisica*, M 8, 1083 a 31-35.

Ora, quelli che introdussero questa opinione non posero le idee là dove parlavano di un prima e di un dopo (per questo non immaginarono affatto l'idea dei numeri)<sup>295</sup>.

Anche in questo caso, è Taylor a fornirci un'ipotesi interpretativa originale. Lo studioso, infatti, ritiene che il senso del brano sia da leggersi:

La serie dei numeri non risulta dell'addizione «unità». Per esempio, noi diciamo che  $3 + 1 = 4$ , ma non intendiamo dire che 3 è tre «unità» o che 4 è 3 e 1; 4 non è quattro *uno*, o un tre e un uno, esso è *un* 4. [...] L'enunciato  $3 = 2 + 1$ , che è la definizione di 3, non significa che 3 sia «un 2 e un 1», ma che 3 è il termine della serie degli interi che viene «subito dopo» 2. Ciò spiega perché non esista l'idea di numero. Il motivo è che ciascun «numero» è esso stesso un'idea<sup>296</sup>.

Non pensare che il numero sia una somma di unità è condizione necessaria (ma, si badi bene, non sufficiente) ad accettare come quantità numeriche anche gli irrazionali: proprio questo sarebbe, secondo Taylor, lo scopo di questa affermazione platonica<sup>297</sup>. Si tratta, a mio giudizio, di un'ipotesi da considerare con la dovuta cautela; e tuttavia essa acquista una certa validità se messa in relazione con un'altra osservazione.

Si è visto che il numero trova le sue origini nell'esigenza di contare, di numerare insiemi di elementi, e che pertanto esso nasce necessariamente come numero naturale. Nella filosofia della matematica greca si trovano ancora evidenti tracce di queste origini: la restrizione del concetto di numero agli interi e la sua definizione come somma di unità sono infatti segno di una mancata separazione concettuale tra numero e gruppo numerato. Il passo del *Filebo* poco sopra richiamato suggerisce che anche in Platone il numero sia rimasto fondamentalmente vincolato all'azione del contare; e tuttavia si può a mio avviso ipotizzare che tale legame, pur presente, fosse meno stretto rispetto a quanto lo era, ad esempio, in Aristotele.

Come si è visto, Aristotele faceva derivare gli enti matematici dalla facoltà umana di astrazione: anche i numeri con cui opera il matematico, quindi, pur essendo perfetti ed immateriali, non appartengono ad un livello ontologico superiore; al contrario, essi non esistono a prescindere dalla mente dell'uomo che li utilizza. Da un insieme di tre uomini, ad esempio, si può astrarre il numero 3: è evidente che, data questa premessa, è pressoché

295 ARISTOTELE, *Etica Nicomachea*, 1096 a 18-19.

296 A. E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, cit., p. 783.

297 Cfr. *ivi*, p. 784.

impossibile svincolare il numero dalla sua funzione di contare. Al contrario Platone, facendo derivare dall'Uno e dalla Diade i numeri, getta le basi perché questi possano essere pensati indipendentemente dai loro corrispettivi gruppi numerati: solo su questa premessa è possibile elaborare un concetto di numero che comprenda anche quantità non intere. D'altra parte, tutte le testimonianze relative alla generazione della serie numerica in Platone suggeriscono che i numeri non fossero generati in ordine: questo sarebbe un ulteriore indizio che il legame tra il numero e l'azione del contare potrebbe essere in Platone relativamente labile<sup>298</sup>.

Non è senz'altro mia intenzione sostenere che Platone riuscì effettivamente a svincolare il numero dalla sua definizione come *somma di unità*, né tanto meno mi sento di affermare, con Taylor, che tale operazione fosse senz'altro mirata ad accogliere tra i numeri anche le quantità irrazionali; tuttavia mi sembra che le osservazioni condotte in questo paragrafo possano essere rivelatrici di un atteggiamento particolarmente aperto e fecondo nei confronti della questione del numero.

### ***Una posizione ambigua.***

Dall'analisi fin qui condotta, emerge come la posizione platonica in merito all'irrazionale aritmetico sia perlomeno ambigua. Esistono infatti numerosi elementi per avanzare l'ipotesi che l'identificazione del numero con il numero naturale, e di conseguenza l'esclusione dell'irrazionale dall'ambito dell'aritmetica, cardini di tutta la matematica greca, fossero in Platone decisamente meno netti e rigidi.

Ad ogni modo, ritengo che occorra procedere molto cautamente prima di attribuire a Platone il merito di aver accolto l'irrazionale nell'universo del numero: abbiamo infatti a nostra disposizione solamente degli indizi che, per quanto significativi, restano sempre solo indizi, e non permettono a mio avviso di pervenire ad alcuna conclusione certa. Sicuramente, partendo dalle basi gettate da Platone, il passo per conferire agli irrazionali lo statuto di numero appare breve, e tuttavia esso è breve *per noi moderni*: purtroppo, nessuno degli elementi a nostra disposizione mi sembra sufficiente a concludere che quel passo fu lo stesso Platone a compierlo.

298 Cfr. J. E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele*, cit., p. 92.

Ciò che invece intendo sostenere con decisione è che la filosofia del numero di Platone sia estremamente ricca e feconda, e che in essa si possano trovare *in nuce* alcuni spunti e alcune intuizioni che, adeguatamente sviluppati, diventano premesse fondamentali per un ripensamento del numero in chiave moderna.

Platone, e solo Platone ha scorto le colonne d'Ercole ai confini del suo tempo. I suoi contemporanei, anche i geometri, sono sempre rimasti lontani da questi confini, nella familiare intimità della loro epoca. Platone considerò anche la matematica con gli occhi di un uomo *del proprio tempo* e non con gli occhi di un matematico moderno. Ma Platone era un *pescatore di perle*: si immergeva nella sostanza della massa pelagica della matematica del suo tempo molto più in profondità di tutti gli altri, il suo sguardo coglieva le perle, contenute nei muscoli da lui portati in superficie, molto più acutamente degli occhi di tutti i matematici del suo tempo. E se noi, oggi, crediamo di riconoscere nella sua concezione evidenti somiglianze con il pensiero della matematica moderna, non significa che così si proiettano nel passato di Platone concetti e categorie della *matematica moderna*. Al contrario, vuol dire che, nella filosofia di Platone, sono nati per la prima volta i germogli di idee decisive per il futuro sviluppo della matematica<sup>299</sup>.

299 I. TOUH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, cit., pp. 371-372.



## CONCLUSIONI

Con questo lavoro di tesi, ho cercato di sviscerare alcune questioni fondamentali che dovettero essere affrontate in epoca pre-euclidea, e che portarono all'elaborazione dei concetti di punto e unità in quella che divenne poi la loro veste definitiva nella matematica greca. Sono partita dall'interpretazione della matematica pitagorica come un vero e proprio sistema assiomatico, che sarebbe stato posto in crisi dalla scoperta dell'incommensurabilità. Preciso che non è assolutamente mia intenzione sposare l'idea per cui la scoperta dell'incommensurabilità sarebbe stata uno "scandalo logico", capace di far crollare il fragile e dogmatico edificio della matematica pitagorica. Cionondimeno, mi sembra che all'interno della prima filosofia della matematica pitagorica si possano individuare dei veri e propri assiomi, i quali necessitarono senz'altro di essere revisionati alla luce della scoperta dell'incommensurabilità. Non ho preteso qui di prendere posizione in merito ai tempi e alle modalità con cui questa scoperta dovette avvenire, e tuttavia ho cercato di mostrare come essa, pur avendo importanti precedenti in altre civiltà, quali l'egizia e la babilonese, debba essere considerata a tutti gli effetti un guadagno della civiltà greca.

Il primo assioma a venir posto in crisi dalla scoperta dell'incommensurabilità è quello relativo all'estensione del punto. Se prima si poteva intendere il punto come un minimo di estensione e lo spazio come un discreto risultante dalla somma di questi punti, l'esistenza di grandezze incommensurabili impose al contrario di pensare allo spazio come ad un continuo, e al punto come ad un infinitesimale, ad un ente geometrico a dimensione zero. Ho tentato di contestualizzare questa evoluzione mettendola in relazione da un lato con le argomentazioni eleatiche sul moto, dall'altro con il progressivo separarsi dell'ente matematico dal mondo fisico, e con il suo trasformarsi in puro ente di ragione. In entrambi questi casi, mi sembra che vi sia una relazione di causa-effetto che può essere letta in entrambe le direzioni.

Ho rilevato in buona parte dei testi antichi con cui mi sono confrontata una certa difficoltà a padroneggiare il nuovo concetto di punto, che, essendo inesteso, sembrava trovarsi al confine con il non-essere. Tale punto, infinitamente piccolo, faticava ad essere posto in relazione con quello di retta. In particolare, da alcune testimonianze sembra che in Platone la difficoltà a pensare la relazione tra il punto e la linea avesse condotto il filosofo a

negare l'esistenza dei "punti contenuti nella retta": da questa affermazione molti studiosi hanno tentato di dedurre che Platone avesse una concezione dello spazio come discreto. Nella mia analisi mi sono impegnata a mostrare come questa posizione sia difficilmente compatibile con le affermazioni contenute nei dialoghi, che suggerirebbero piuttosto, anche nel caso di Platone, una concezione continua dello spazio geometrico.

La relazione che intercorre tra punto e retta dischiude poi un'altra problematica, che nel mio lavoro è stata solo accennata. Mi riferisco all'ipotesi per cui, in Platone, ma in qualche modo, di riflesso, anche in Euclide, i diversi enti matematici apparirebbero a gradi ontologici diversi ed irriducibili: in analogia a questa scala ontologica potrebbe essere pensata anche tutta la gradazione del reale. Alcuni tentativi di lettura della matematica platonica in questa direzione sono stati fatti da alcuni esponenti della scuola di Tubinga, e meriterebbero senz'altro uno spazio che in questa tesi non hanno potuto trovare.

Alla riformulazione del concetto di spazio seguì in modo consequenziale la riformulazione del concetto di  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ . Mi sono impegnata a mostrare in che senso si possa parlare, anche in questo caso, di un vero e proprio evento assiomatico. Nella definizione eudossiana di  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ , impostasi anche grazie ad Euclide, si trovano alcuni elementi estremamente moderni, in particolare ho cercato di mettere in luce come Eudosso ed Euclide anticipino di fatto il concetto di "elemento di separazione", grazie al quale essi riescono a definire anche rapporti irrazionali tra grandezze, e attraverso cui è oggi possibile definire i numeri reali. Per questa ragione, si attribuisce talvolta a questi due matematici il merito di aver considerato per la prima volta come numeri anche gli irrazionali. L'ipotesi che mi sono impegnata a sostenere è quella per cui, lungi dal fondare i numeri irrazionali, la teoria di Eudosso sarebbe al contrario mirata essenzialmente a salvare le grandezze irrazionali aggirando i numeri irrazionali stessi.

Infatti, non sembra che il ripensamento dello spazio geometrico, e in particolare del punto, abbia trovato corrispondenza in un analogo ripensamento del numero e dell'unità. Operando una semplificazione estrema (chiaramente insufficiente a rendere conto della complessità della problematica, e tuttavia a mio avviso efficace), si potrebbe leggere la questione in questi termini. A seguito della scoperta dell'incommensurabilità, la matematica pitagorica si era trovata a poggiare su tre presupposti fondamentali: l'indivisibilità dell'unità, la continuità dello spazio e la corrispondenza tra aritmetica e geometria; tuttavia era impossibile far coesistere questi tre presupposti (o, potremmo dire, questi tre assiomi),

contemporaneamente e senza contraddizione. Dal momento che la continuità dello spazio derivava in modo necessario dall'esistenza di grandezze incommensurabili, la quale era stata a sua volta inconfutabilmente dimostrata, l'*empasse* poteva essere risolto sostanzialmente in due modi: conferendo lo statuto di *numero* anche alle quantità irrazionali, oppure rinunciando alla corrispondenza tra aritmetica e geometria sulla quale la prima matematica pitagorica si era fondata.

Ho dedicato la seconda parte del mio lavoro a mostrare come i matematici greci abbiano percorso solamente la prima di queste due vie, dimostrandosi sostanzialmente non in grado di ripensare il numero in analogia allo spazio geometrico continuo; nel condurre quest'argomentazione ho ricercato, tra l'altro, di confrontare la concezione greca di numero con quelle che erano state elaborate da civiltà precedenti, quali l'egizia e la babilonese.

In particolare, mentre il numero continuava ad avere come costitutivo primo ed indivisibile l'uno, il punto andava pensato come un ente geometrico a dimensione zero: i due, così pensati, non potevano chiaramente più essere assimilati com'era avvenuto nella prima matematica pitagorica. Restava, tra punto e unità, una relazione poco più che formale: in Aristotele, ma anche in Euclide, si ritrovano dei passaggi in cui i due concetti venivano ancora presentati in analogia l'uno all'altro: caratterizzati entrambi dal “non avere parti”, essi continuavano a rappresentare il costitutivo primo rispettivamente dello spazio geometrico e del numero; e tuttavia era evidente che la loro sovrapposizione, nei termini in cui era stata proposta dalla prima scuola pitagorica, non era più possibile.

Focalizzando la mia attenzione in particolar modo sul pensiero matematico di Aristotele, ho osservato come la restrizione del concetto di numero ai soli interi non sia indipendente dal modo in cui la natura del numero stesso era pensata: in particolare, ho trovato significativo che vi fosse, nella matematica greca, una sostanziale sovrapposizione tra gli oggetti contati e i numeri attraverso cui tali oggetti venivano contati, sovrapposizione che nel pensiero aristotelico trovava una sua giustificazione, dal momento che il numero era considerato l'esito di un processo di astrazione operato dalla mente umana.

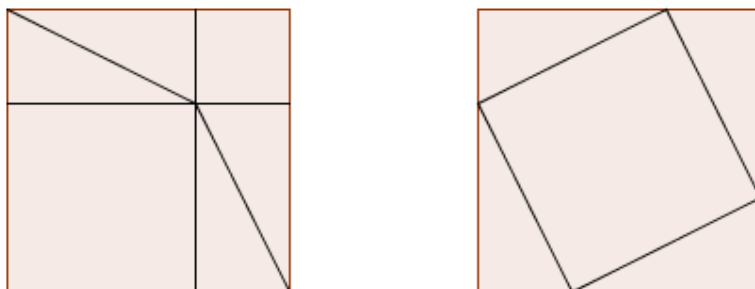
Pertanto, ho ritenuto che fosse significativo, ai fini dell'analisi che stavo conducendo, dedicare un certo spazio allo studio dello statuto ontologico degli enti matematici, con particolare attenzione alla filosofia di Platone e di Aristotele: ho rilevato tra i due un'inconciliabile discrepanza in merito, la quale mi ha condotto ad indagare più approfonditamente la concezione del numero di Platone.

Nel fare ciò, ho ritenuto fruttuoso impostare la mia indagine attraverso un confronto sistematico con le cosiddette “dottrine non scritte”, sebbene io non abbia avuto modo di sviscerare pienamente la portata del loro contenuto matematico. La parte finale del mio lavoro è sostanzialmente mirata ad evidenziare come in Platone si possa trovare la tensione verso un concetto di numero più ampio, e prossimo al moderno concetto di numero reale. Lungi dal voler sostenere che il filosofo ateniese sia effettivamente riuscito ad elaborare compiutamente e consapevolmente una nuova concezione del numero, ritengo tuttavia che nei dialoghi, ma soprattutto nelle dottrine non scritte, si possano trovare, seppur solo abbozzati, molti presupposti di questa nuova concezione. In particolare, è significativo che Platone faccia derivare i numeri dall'azione dell'Uno e della Diade anziché dalla facoltà umana di astrazione: in primo luogo, ciò rappresenta il primo passo per chiarire la confusione tra numero e gruppo numerato, ed in secondo luogo indica una significativa continuità dell'aritmetico con il geometrico, il quale, come si è visto, era in grado di ospitare l'irrazionale.

A partire da quanto fin qui messo a fuoco, sarebbe interessante approfondire il ruolo della matematica nel pensiero di Platone lungo almeno due vie, che non è tuttavia stato possibile percorrere nello spazio di questa tesi. Innanzitutto, sarebbe significativo mettere in luce la relazione sussistente tra l'interesse per la matematica e lo sviluppo della teoria delle idee. Inoltre, meriterebbe a mio avviso di essere approfondito, in una trattazione a sé stante, il legame tra la matematica, in particolar modo la questione dell'irrazionalità, e l'antropologia: in un pensatore come Platone, infatti, la matematica può essere utilizzata come chiave di lettura del reale su più piani, e può addirittura rendere comprensibile in modo nuovo e diverso la stessa struttura dell'anima umana.

## APPENDICE

### 1. Una dimostrazione intuitiva del teorema di Pitagora.

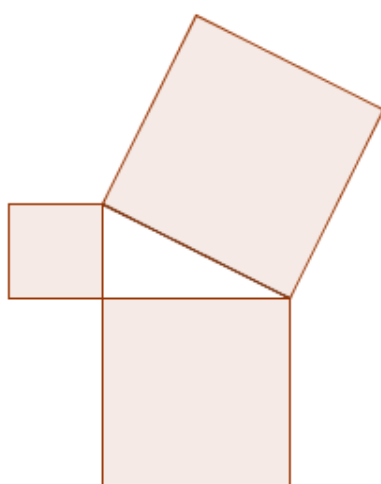


Si può dare, del teorema di Pitagora, una dimostrazione estremamente semplice ed intuitiva.

Sia dato un triangolo rettangolo qualsiasi, e siano detti  $a$  e  $b$  i suoi cateti, e  $c$  la sua ipotenusa.

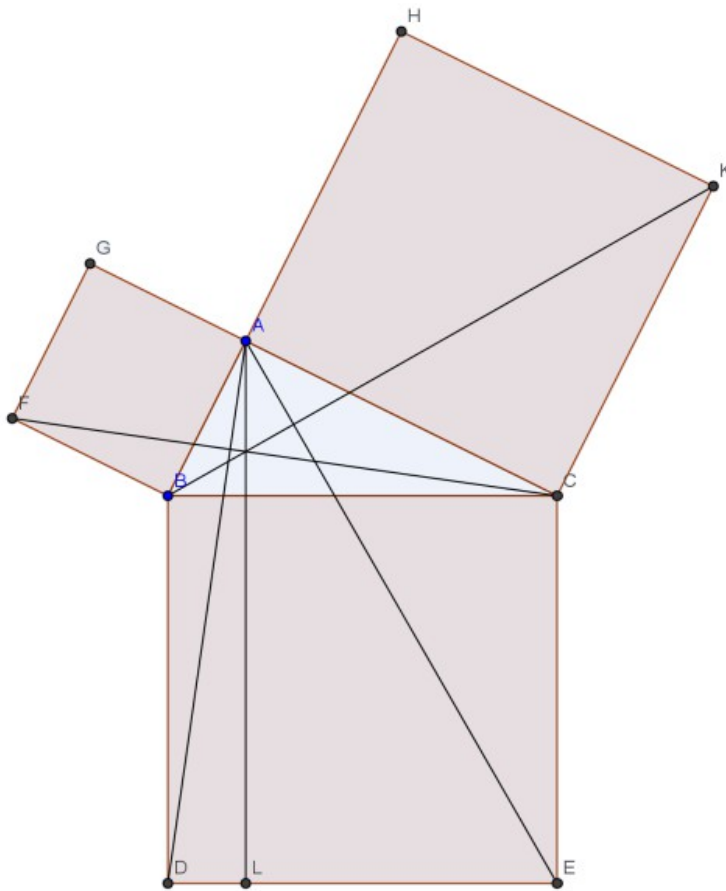
Costruito un quadrato di lato  $a + b$ , si possono sottrarvi quattro triangoli rettangoli di cateti  $a$  e  $b$ , nei due modi indicati in figura.

La differenza è, nel primo caso, uguale a due quadrati aventi per lati rispettivamente  $a$  e  $b$ , nel secondo caso un quadrato avente per lato  $c$ .



Poiché differenze di aree congruenti sono congruenti, si deduce che  $a^2 + b^2 = c^2$ .

2. Il teorema di Pitagora dimostrato in *Elementi*, I, 47.



Dato il triangolo rettangolo ABC, di cateti AB e AC, si costruiscono i triangoli ACKH, ABFG e BCED, e si tracci AL parallela a BD, con L appartenente a DE.

Si dimostra che C, A e G sono allineati, e così pure B, A e H.

Si considerino i triangoli BFC e ABD. Essi hanno:

$$AB = FB,$$

$$BC = BD$$

$$\angle ABD = \angle CBF = \angle ABC + \frac{\pi}{4} .$$

Essi sono pertanto congruenti.

Si osserva che il quadrato FBAG è uguale al doppio di CBF: essi hanno infatti la stessa base e la stessa altezza.

Il rettangolo individuato da BD e DL è uguale al doppio di ABD, per la stessa ragione.

Ma poiché doppi di cose uguali sono uguali tra loro, si ha che:

il rettangolo individuato da BD e DL è equivalente al quadrato FBAG.

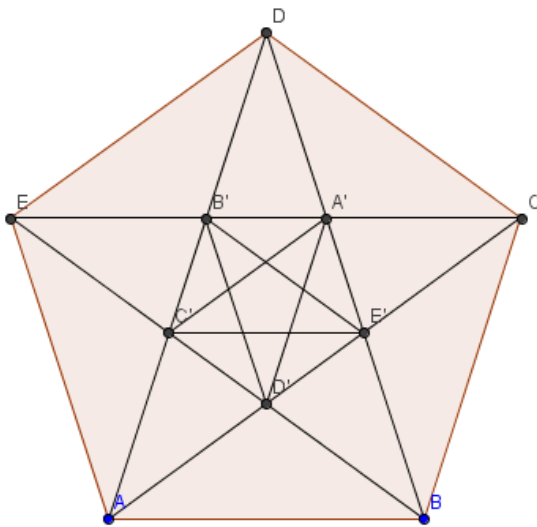
Analogamente, si dimostra che:

il rettangolo individuato da CE ed EL è equivalente al quadrato AHKC.

Poiché somme di cose congruenti sono congruenti, si ha:  $BCED = AHKC + FBAG$

Si dimostra così che la somma dei quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

### 3. L'incommensurabilità di lato e diagonale del pentagono con l'ἀνθυφαίρεσις.



Dato il pentagono regolare ABCDE, si conducano le sue diagonali: si chiamino i loro punti di intersezione come segue:

$$EC \cap DB = A'$$

$$AD \cap EC = B'$$

$$EB \cap AD = C'$$

$$AC \cap EB = D'$$

$$DB \cap AC = E'$$

I punti A'B'C'D'E' formano a loro volta un pentagono regolare.

Poiché la somma degli angoli interni di

un poligono di  $n$  lati è uguale a  $(n - 2) \cdot \pi$ , e poiché un poligono regolare ha tutti gli angoli congruenti, allora:

$$EAB = ABC = BCD = CDE = DEA = \frac{3}{5}\pi .$$

Si consideri il triangolo ABC: esso risulta isoscele sulla base AC, pertanto i suoi angoli alla base sono congruenti. Dal momento che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a  $\pi$ , si avrà:

$$BAC = ACB = \frac{(\pi - \frac{3}{5}\pi)}{2} = \frac{\pi}{5} .$$

Analogamente si dimostra che:

$$BDC = CBD = DCE = DEC = EDA = DAE = EBA = BEA = \frac{\pi}{5} .$$

Per differenza, si calcola che:

$$DAC = EBD = ACE = ADB = CEB = \frac{\pi}{5}$$

Si consideri il triangolo EB'A; esso ha:

$$AEB' = 2 \cdot \frac{\pi}{5}$$

$$\angle EAB' = \frac{\pi}{5}$$

$$\angle ABE = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = 2 \cdot \frac{\pi}{5}$$

Esso è quindi isoscele sulla base  $EB'$ , pertanto  $\mathbf{AE} = \mathbf{AB'}$ .

Si consideri quindi il triangolo  $AB'D'$ , esso ha:

$$\angle B'AD' = \frac{\pi}{5}$$

$$\angle D'B'A = \frac{\pi}{5} \quad (\text{Sul pentagono } A'B'C'D'E' \text{ si possono condurre infatti osservazioni}$$

del tutto analoghe a quelle condotte su  $ABCDE$ ).

Esso è quindi isoscele sulla base  $B'D'$ , pertanto  $\mathbf{AB'} = \mathbf{AD'}$ .

Si proceda quindi ad applicare al pentagono  $ABCDE$  l'ἀνθυφαίρεσις:

$$r_1 = d - l = DA - AE = DA - AB' = B'D = AC' = B'D$$

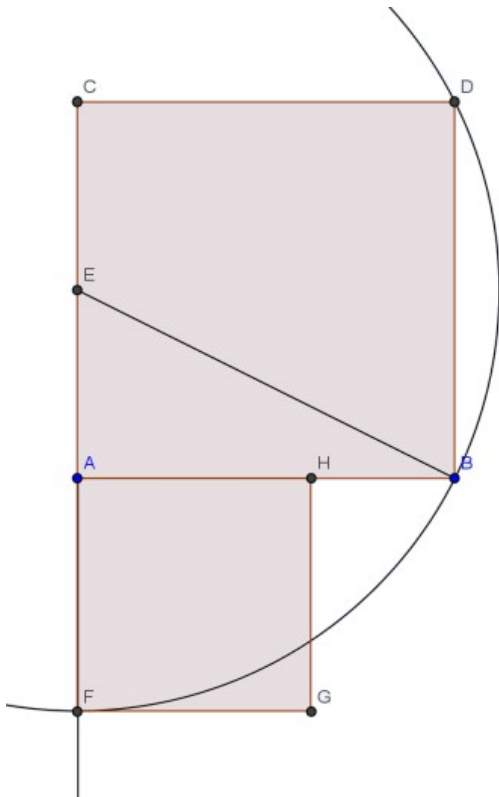
$$r_2 = l - r_1 = AE - B'D = AB' - AC' = B'C'$$

Si trova che  $r_1$  e  $r_2$  costituiscono, rispettivamente, diagonale e lato del pentagono  $A'B'C'D'E'$ : ci si ritrova quindi esattamente al punto di partenza. L'ἀνθυφαίρεσις, quindi, non potrà mai avere termine.



#### 4. La divisione di un segmento in media ed estrema ragione

(con il procedimento proposto in *Elementi*, II, 11).



Si vuole dividere il segmento AB in media ed estrema ragione.

Si costruisca il quadrato ABCD, e sia E il punto medio di AC.

Si prolunghi AC dalla parte di A. Si conduca la circonferenza di centro E e raggio EB, che interseca il prolungamento di AC nel punto F.

Si costruisca il quadrato AFGH, con H appartenente ad AB. H divide AB in media ed estrema ragione.

In termini contemporanei, potremmo dire che, assegnato il valore 1 ad AB:

$$AE = \frac{1}{2} .$$

$$EB = \sqrt{\left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

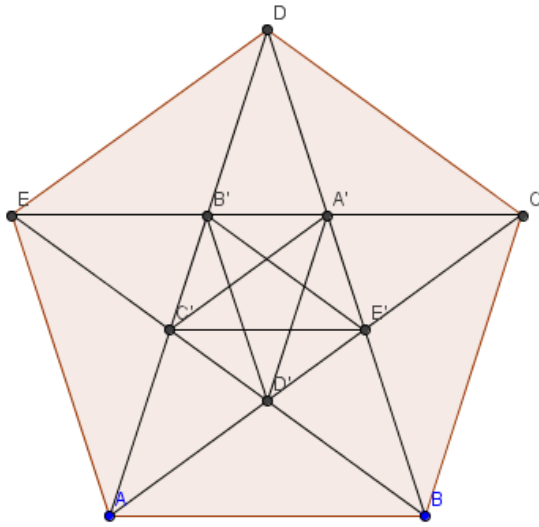
$$AF = AH = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} .$$

Si verifica che:

$$1 : \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} : \frac{(3-\sqrt{5})}{2} .$$

Pertanto, i segmenti AH e HB sono in proporzione aurea.

## 5. La relazione di proporzionalità aurea nel pentagono.



All'interno del pentagono regolare sussiste una relazione di proporzione aurea tra la diagonale ed il lato.

Si può infatti dimostrare che si verifica:

$$AD : AE = AE : (AD - AE).$$

Si è precedentemente dimostrato che, in un pentagono così costruito, si ha

$$AE = AB'.$$

Inoltre,  $AE = AB$  poiché il pentagono regolare è equilatero.

Per transitività,  $AB = AB'$ .

Si consideri il triangolo  $AEC'$  e  $EDB'$ :

$$\angle DEB' = \angle EDB' = \frac{\pi}{5} \text{ (precedentemente dimostrato)}$$

Esso è quindi isoscele su base  $ED$ , pertanto:

$$DB' = EB'$$

Si considerino i triangoli  $ABD$  e  $AEB'$ , essi sono simili, infatti:

$$\angle DAB = \angle DBA = \angle AB'E = \angle AEB' = 2 \cdot \frac{\pi}{5}$$

Pertanto:

$$DA : AB = AB' : EB'.$$

Ossia:

$$DA : AE = AE : DB'$$

E poiché  $DB' = AD - AB' = AD - AE$ :

$$DA : AE = AE : (AD - AE).$$

## 6. L'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato con procedimento aritmetico.

Se il lato e la diagonale del quadrato fossero commensurabili, dovrebbe esistere una coppia di numeri interi  $m$  ed  $n$ , primi fra loro, tali che

$$\frac{m}{n} = \frac{l}{d}$$

Per quanto affermato dal teorema di Pitagora, dovrebbe quindi essere:

$$2m^2 = n^2.$$

$n^2$  è quindi pari, pertanto anche  $n$  è pari.

Si dimostra infatti che il quadrato di un numero pari è pari, e il quadrato di un numero dispari è dispari, e viceversa.

Un numero pari può essere scritto nella forma  $2k$ .

Il suo quadrato sarà dunque del tipo  $4k^2$ .

Essendo un multiplo di 4, sarà a maggior ragione multiplo di 2, e dunque pari.

Un numero dispari può essere scritto nella forma  $2k + 1$ .

Il suo quadrato sarà  $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ .

Esso è il consecutivo di  $4k(k + 1)$ , che è pari, pertanto è dispari.

Se  $n$  è pari, esso può essere espresso come  $2t$ . Si ha quindi:

$$2m^2 = (2t)^2$$

$$2m^2 = 4t^2$$

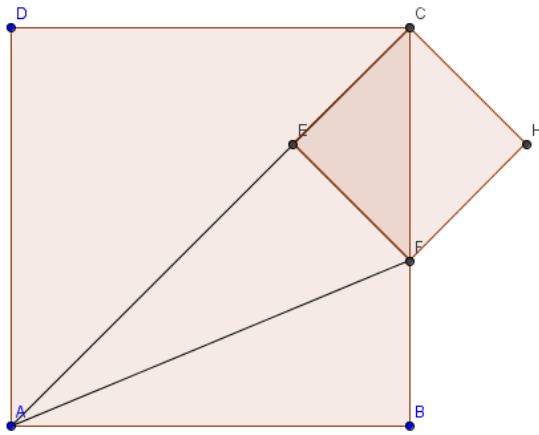
$$m^2 = 2t^2$$

Dunque,  $m^2$  è pari essendo multiplo di 2, ma allora anche  $m$  è pari.

Ma due numeri entrambi pari non possono essere primi fra loro, essendo entrambi multipli di 2. L'ipotesi iniziale è quindi contraddetta.

Si deve dunque ammettere che non esistono due valori  $m$  ed  $n$  tali che  $\frac{m}{n} = \frac{l}{d}$

7. L'incommensurabilità di lato e diagonale del quadrato con l'ἀνορθωσις.



Dato un quadrato ABCD si tracci la diagonale AC, e si riporti su di essa un segmento  $AE = AB$ .

Si tracci la perpendicolare ad AC passante per E che interseca BC in F.

Si osservi il triangolo ECF:

$$\angle ECF = \frac{\pi}{4} ;$$

$$\angle CEF = \frac{\pi}{2} .$$

Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto, si ha:

$$\angle EFC = \frac{\pi}{4} .$$

Il triangolo ECF è pertanto rettangolo e isoscele su base FC. È quindi possibile costruire un quadrato avente EF ed EC per lati: sia detto H il quarto vertice di tale triangolo.

Si considerino i triangoli AEF e ABF, essi sono entrambi rettangoli, inoltre:

AF in comune;

$AE = AB$  per costruzione.

Essi sono quindi congruenti, in particolare:

$$\mathbf{BF = EF.}$$

Si proceda quindi ad applicare al quadrato ABCD l'ἀνορθωσις:

$$r_1 = d - l = AC - AB = AC - AE = EC.$$

$r_1$  è contenuto in  $l$  due volte, pertanto l'operazione di sottrazione andrà ripetuta due volte.

La prima sottrazione sarà:

$$AB - EC = BC - BF = CF$$

Occorre a questo punto trovare  $CF - EC$ .

Si nota, tuttavia, che il problema si riduce a sottrarre il lato del quadrato AFHC dalla sua diagonale: si è dunque tornati esattamente al punto di partenza. L'ἀνθυφαίρεσις non potrà dunque mai avere termine.

## 8. La sequenza delle diagonali effabili in *Elementi*, II, 10.

Dalla proposizione 10 del Libro secondo degli *Elementi* si possono ricavare formule con cui trovare tutte le successive coppie di numeri naturali che risolvono:

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

La proposizione in questione, infatti, dimostra che:

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$$

Elaborandola, si ottiene:

$$\begin{aligned}(2a + b)^2 - 2(a + b)^2 &= 2a^2 - b^2 \\ - [2(a + b)^2 - (2a + b)^2] &= 2a^2 - b^2\end{aligned}$$

Dunque, presi due numeri  $a$  e  $b$  tali che:

$$2a^2 - b^2 = +1,$$

si possono calcolare due nuovi numeri:

$$c = a + b$$

$$d = 2a + b$$

tali che:

$$2c^2 - d^2 = -1$$

La prima coppia per cui si ha  $2a^2 - b^2 = +1$  è:

$$a = 1; b = 1,$$

a partire da questa si possono ottenere infinite coppie  $(x; y)$ , tali che

$$2x^2 - y^2$$

dà come risultato, alternativamente,  $+1$  e  $-1$ .

## 9. Due dimostrazioni relative alla frazione continua per il calcolo di $\sqrt{2}$ .

È possibile trovare la frazione continua che genera valori approssimati di  $\sqrt{2}$  procedendo come segue.

Si pone  $\sqrt{2} = 1 + x$ .

Poiché  $(\sqrt{2})^2 = 2$ , si ha anche  $(1 + x)^2 = 2$ .

Operando sull'ultima equazione ottenuta, si ottiene:

$$1 + 2x + x^2 = 2$$

$$2x + x^2 = 1$$

$$x(x + 2) = 1$$

Da cui si ricava:

$$x = \frac{1}{(2+x)}$$

È quindi possibile sostituire ad  $x$  l'espressione  $\frac{1}{(2+x)}$ .

Si ha dunque:

$$\sqrt{2} = 1 + x = 1 + \frac{1}{2+x} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+x}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\dots}}}$$

Come si vede, la frazione trovata è quella a noi nota, utilizzata in epoca greca per il calcolo di approssimazioni razionali di  $\sqrt{2}$ .

È possibile giustificare il funzionamento della frazione anche all'inverso. Sia detto  $x$  il valore a cui tende la frazione all'infinito, si può scrivere:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

O, il che è lo stesso,

$$x = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Il denominatore del secondo membro di destra dell'equazione è identico ad  $1 +$  l'intera frazione continua: dal momento che la frazione si ripete sempre uguale a se stessa, per un numero di volte infinito, la sequenza contenuta nel denominatore della frazione è infatti indistinguibile, sotto tutti i punti di vista, dalla frazione continua stessa.

Dunque, si può scrivere:

$$x = 1 + \frac{1}{(1+x)}$$

Eseguendo i calcoli, si trova:

$$x + x^2 = 1 + x + 1$$

$$x^2 = 2$$

$x$  è quindi il valore che, elevato al quadrato, restituisce 2, cioè proprio  $\sqrt{2}$ .



## BIBLIOGRAFIA

### Autori antichi

ARISTOTELE, *Metafisica*, a cura di Giovanni Reale, Bompiani, Milano 2000;

ARISTOTELE, *Opere vol. 1: Organon: Categorie, Dell'espressione, Primi Analitici, Secondi Analitici*, traduzione di Marcello Gigante e Giorgio Colli, Laterza, Roma Bari 1982;

ARISTOTELE, *Opere vol. 3: Fisica, Del Cielo*, traduzione di Antonio Russo e Oddone Longo, Laterza, Roma Bari 1995;

ARISTOTELE, *Opere vol. 4: Della generazione e della corruzione, Dell'anima, Piccoli trattati di Storia naturale*, traduzione di Antonio Russo e Renato Laurenti, Laterza, Roma Bari 1994;

ARISTOTELE, *Opere vol. 7: Etica Nicomachea*, traduzione di Armando Plebe, Laterza, Roma Bari 1993;

EUCLIDE, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, Torino 1970;

GIAMBILICO, *Sulla introduzione all'etica di Nicomaco*, in *Il Numero e il Divino*, a cura di Francesco Romano, Rusconi, Milano 1995;

PLATONE, *Tutti gli scritti*, a cura di G. Reale, Bompiani, Milano 2005;

PROCLO, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, a cura di Maria Timpanaro Cardini, Giardini Editori e Stampatori in Pisa, Pisa 1978;

TEONE DI SMIRNE, *Theon of Smyrna: Mathematics useful for understanding Plato*, translated from the 1892 Greek/French edition of J. Dupuis, a cura di R. & D. Lawlor, Wizard Bookshelf, San Diego 1979;

## Altri autori

JULIA E. ANNAS, *Interpretazione dei Libri M-N della Metafisica di Aristotele. La Filosofia della matematica in Platone e Aristotele*, Vita e pensiero, Milano 1992 (orig. JULIA E. ANNAS, *Aristotele's Metaphysics, Books M and N, translated with introduction and notes*, Oxford University Press, Oxford 1976);

ENRICO BERTI, *Guida ad Aristotele*, Laterza, Roma Bari 2000;

CARL B. BOYER, *Storia della matematica*, ISEDI Istituto Editoriale Internazionale, Milano 1976 (orig. CARL B. BOYER, *A history of mathematics*, Wiley 1968);

WALTER BURKERT, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, Harvard University press, Cambridge, Mass. 1972 (orig. WALTER BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Verlag Hans Carl, Nürnberg 1962);

GUIDO CALOGERO, *Studi sull'eleatismo*, La nuova Italia, Firenze 1977;

GIUSEPPE CAMBIANO, *Figura e Numero*, in AA.VV., *Il sapere degli antichi*, a cura di M. Vegetti, Boringhieri, Torino 1985, pp. 83-108;

ELISABETTA CATTANEI, *Enti matematici e metafisica. Platone, l'Accademia e Aristotele a confronto*, Vita e pensiero, Milano 1996;

MAURICE CAVEING, *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide. La constitution du type mathématique de l'idealité dans la pensée grecque*, Presses universitaires du septentrion, Paris 1998;

MAURICE CAVEING, *Zenon d'Elea. Proglomenes aux doctrines du continu. Etude historique et critique des fragments et témoignages*, Vrin, Paris 1982;

BRUNO CENTRONE, *Introduzione ai Pitagorici*, Laterza, Roma 1996;

LEVI LEONARD CONANT, *The number concept. Its origin and development*, Macmillan and Co., New York 1896;

PIERLUIGI DONINI, *La Metafisica di Aristotele. Introduzione alla Lettura*, NIS, Roma 1995;

JOHN N. FINDLAY, *Platone. Le dottrine scritte e non scritte*, Vita e pensiero, Milano 1994 (orig. JOHN N. FINDLAY, *Plato, the Written and Unwritten Doctrines*, Humanities Press, New York 1974);

ATTILIO FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*, Studium, Roma 1951;

ATTILIO FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Studium, Roma 1963;

ATTILIO FRAJESE, *Sul significato dei postulati euclidei*, Scientia. Rivista internazionale di sintesi scientifica, 85, 1950, pp. 299-305;

KONRAD GAISER, *La dottrina non scritta di Platone. Studi sulla fondazione sistematica e storica delle scienze nella scuola platonica*, Vita e pensiero, Milano 1994 (orig. KONRAD GAISER, *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett-Cotta, Stuttgart 1962);

LODOVICO GEYMONAT, *Storia della matematica*, in AA.VV., *Storia delle Scienze*, Vol. 1, a cura di Nicola Abbagnano, UTET, Torino 1962;

LODOVICO GEYMONAT, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Vol. 1, Garzanti, Milano 1975;

SIR THOMAS HEATH, *A history of greek mathematics*, Dover Publications, New York 1981;

VITTORIO HÖSLE, *I fondamenti dell'aritmetica e della geometria in Platone*, Vita e pensiero, Milano 1994;

JACOB KLEIN, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, The MIT press, Massachusetts Institute of Tecnology, Cambridge 1968 (orig. JACOB KLEIN, *Die griechische Logistik und die Entsebung der Algebra, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B: Studien, Vol. 3, fasc. 1 (Berlin, 1934), pp. 18-105 (Part I); fasc. 2 (1936), pp. 122-235 (Part II).);

MORRIS KLINE, *Storia del pensiero matematico*, Vol 1., Einaudi, Torino 1996 (orig. MORRIS KLINE, *Mathematical thought from Ancient to modern times*, Vol. 1, Oxford University Press, Oxford 1990);

MARIO LIVIO, *La sezione aurea*, Rizzoli, Milano 2007;

MAURIZIO MIGLIORI, *Unità, molteplicità, dialettica. Contributi per una riscoperta di Zenone di Elea*, Unicopli, Milano 1984;

OTTO NEUGEBAUER, *Le scienze esatte nell'antichità*, Feltrinelli, Milano 1974 (orig. OTTO NEUGEBAUER, *The exact sciences in Antiquity*, Princeton University Press, Princeton 1952);

PAOLO PAGANI, *Studi di filosofia morale*, Aracne, Roma 2008;

PAOLO PAGANI, *La geometria dell'anima. Riflessioni su matematica ed etica in Platone*, Orthotes, Napoli 2012;

JAMES A. PHILIP, *Pythagoras and early pythagoreanism*, University Press, Toronto 1968;

JOHN E. RAVEN, *Pythagoreans and Eleatics*, A. M. Hakkert-Publisher, Amsterdam 1966;

GIOVANNI REALE, *Storia della filosofia antica*, Vita e pensiero, Milano 1984;

GIOVANNI REALE, *Per una nuova interpretazione di Platone. Rilettura della metafisica dei grandi dialoghi alla luce delle "Dottrine non scritte"*, Vita e pensiero, Milano 1987;

GIOVANNI REALE, *Guida alla lettura della Metafisica di Aristotele*, Laterza, Roma Bari 1997;

ALFRED E. TAYLOR, *Platone, L'uomo e l'opera*, La nuova Italia, Firenze 1968 (orig. ALFRED E. TAYLOR, *Plato. The man and his work*, Methuen e Co., London 1926);

MARIA TIMPANARO CARDINI, *Gli Eleati. Frammenti e testimonianze*, R. Carabba Editore, Lanciano 1931;

IMRE TOTH, *Lo schiavo di Menone, Il lato del quadrato doppio, la sua misura non misurabile, la sua ragione irrazionale. Commento a Platone, 82 b-86 c*. Vita e pensiero, Milano 1998;

IMRE TOTH, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Proglogeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel Corpus Aristotelicum nel loro contesto matematico e filosofico*, Vita e pensiero, Milano 1997;

KURT VON FRITZ, *Le origini della scienza in Grecia*, Il mulino, Bologna 1988 (orig. KURT VON FRITZ, *Der Ursprung der Wissenschaft bei den Griechen*, pp. 1-326 di *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Walter De Gruyter & Co., Berlin-New York 1971);

KURT VON FRITZ, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*, in *Annals of Mathematics*, 46, 1945, pp. 242-264;

HIERONYMUS G. ZEUTHEN, *Sur les definitions d'Euclide*, in *Scientia. Rivista internazionale di sintesi scientifica*, 24, 1918, pp. 257-269.